Mat 5111

Complément et synthèse II

Feuille de route
et exercices

Élaborée par :
Madeleine Gagnon
Commission scolaire des Grandes-Seigneuries
Pour le Sous-comité FGA Montérégie

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cette feuille de route fut produite en Montérégie pour pallier à l'absence de guide d'apprentissage lors de l'implantation des cours de 5^{e} secondaire du programme remanié de mathématiques à la formation générale des adultes.

Pour utiliser cette feuille de route, l'élève doit utiliser :

- Les manuels *Réflexions Mathématiques 536* Tome 1 et 2
  - Les éditions CEC
  - Guy Breton, dir., Claire Bourdeau, Benoît Côté, Claude Delisle, André Deschênes, Antoine Ledoux
- Le cahier d'exercices *Objectif : mathématique 536, 2^{e} édition, cahier d'exercices, 5^{e} secondaire*
  - Éditions Grand Duc – HRW
  - Carrière (1998)
- Les feuilles de révision du corrigé du cahier d'exercices *Objectif : mathématique 536, 2^{e} édition, cahier d'exercices, 5^{e} secondaire*

Dans la feuille de route, les images suivantes référeront à ces documents :

 Tome 1 — Réflexions mathématiques Tome 1

 Tome 2 — Réflexions mathématiques Tome 2

Cahier  — Cahier d'exercices Objectif : mathématique 536

Feuilles  — Feuilles de révision Objectif : mathématique 536

I. FONCTIONS

A. Révision sur les fonctions et leurs caractéristiques

La section A est une révision des cours Mat 5106 à Mat 5108. L'élève peut, au choix, réviser les différentes fonctions et leurs caractéristiques dans ses cahiers d'apprentissage précédents ou suivre la démarche proposée par cette feuille de route.

1. Définitions et caractéristiques des fonctions

Tome 1

p.2 à p. 7

2. Différents types de fonctions et le rôle de leurs paramètres

a) Présentation rapide des fonctions polynomiales de degré 0, 1 ou 2, fonctions valeur absolue, escalier, racine carrée.

p. 6 à p. 8

Tome 1

Rôle du paramètre a : p. 9 à p. 10 no d)
Rôle du paramètre b : p. 10
Rôle du paramètre h : p. 11 nos i) et j)
Rôle du paramètre k : p. 11 nos k) à p. 12 no m)

b) Présentation détaillée de chacune des fonctions réelles

- Fonctions constantes (Polynomiales de degré 0)

Tome 1

p. 27 à p. 28 no f)

- Fonctions linéaires (Polynomiales de degré 1)

Tome 1

Fonction linéaire de base : p. 29 à 30
Fonction linéaire transformée : p. 30 et 31
Recherche du zéro : p. 31 à 32
Tableau récapitulatif : p. 37
Exercices : *Investissement* 4 p. 38,. nos 1, 4, 5, 6, 14 et 16.

- Fonctions quadratiques (Polynomiales de degré 2)

Tome 1

Fonction quadratique de base : p. 43
Fonction quadratique transformée : p. 44 à p. 49 no i)
Recherche des zéros : p. 49 à p. 50
Tableau récapitulatif : p. 55
Exercices : *Investissement* 5 p. 56, nos 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10 ,11 et 13 a) et b)

- Fonctions valeur absolue

Tome 1

Fonction valeur absolue de base p. 67 à p. 68
Fonction valeur absolue transformée p. 69 à p. 72 no i)
Exercices : *Investissement* 6 p. 73, nos 3 à 10 et no 13
Recherche des zéros : p. 76 à p. 79 exemple 3
Tableau récapitulatif : Annexe 1 p.12

Exercices : *Investissement* 7 p.80, nos 1, 2, 4, 5 et no 10
Étude du signe de la fonction : p. 85 nos a) à c
Exercices : *Investissement* 8 p. 88, nos 1 et 2

- Fonctions racine carrée — Tome 1

Fonction racine carrée de base p. 100 à p. 102
Fonction racine carrée transformée p. 102 à p. 104
Exercices : *Investissement* 10 p. 105, nos 4 à 16
Recherche des zéros : p. 108 à p. 111 exemples 1, 2, 3 ainsi que p. 111 no h)
Étude du signe de la fonction : p. 111 nos a) à d)
Tableau récapitulatif : p. 114
Exercices : *Investissement* 11 p. 115, nos 1, 9, 12, 13 et 29

- Fonctions escalier (Plus grand entier inférieur ou égal) — Tome 1

Fonction plus grand entier de base p. 123 à p. 124
Fonction plus grand entier transformée p. 124 à p. 126
Exercices : *Investissement* 12 p. 127, nos 5, 6, 11 à 15

- Fonctions rationnelles — Tome 1

Fonction rationnelle de base 132 à p. 133
Fonction rationnelle transformée p. 133 à p. 135 no n)
Recherche des zéros : p. 136
Tableau récapitulatif p. 137
Exercices : *Investissement* 13 p. 137, nos 1 à 13 et no 15

- Fonctions exponentielles — Tome 1

Fonction exponentielle de base p. 345 à p. 346, p. 348 no k)
Exercices : *Investissement* 2 p. 349, nos 4 à 7
Fonctions exponentielles transformées : p. 350 à p. 353
Recherche des zéros : p. 353 à p. 355 exemple 2
Signes de la fonction p. 356
Tableau récapitulatif : p. 357
Exercices : *Investissement* 3 p. 357, nos 1 à 10 et nos 12, 13

- Fonctions logarithmiques — Tome 1

Révision des propriétés des logarithmes : p. 393 à p. 396
Exercices sur les propriétés : *Investissement* 6 p. 397 nos 1, 2, 7, 9 et 13
Fonctions logarithmiques de base: p. 388 à p. 390 no g)
Exercices : *Investissement* 5 p. 390, nos 1 à 4 et nos 9 à 11
Fonctions logarithmiques transformées : p. 400 à 401 no h)
Tableau récapitulatif : p. 405
Exercices : *Investissement* 7 p. 408, nos 1 à 10

- La fonction sinus

Tome 2

Fonction sinus de base : p. 242 à 244
Fonction sinus transformée : p. 244 à 246
Recherche des zéros : p. 247 à p. 250 exemple 3
Tableau récapitulatif : p. 250
Exercices : *Investissement* 4 p. 253, nos 1 à 12 et nos 14 et 25

- La fonction cosinus

Tome 2

Fonction cosinus : p. 258 à 261
Recherche des zéros : p. 262
Tableau récapitulatif : p. 263
Exercices : *Investissement* 5 p. 263, nos 2 à 9, no 13

- La fonction tangente

Tome 1

Fonction tangente de base : p. 266 à 267
Fonction tangente transformée : p. 268 à p. 269 no j)
Tableau récapitulatif : p. 269
Exercices : *Investissement* 6 p. 269, nos 1 à 9

B. Composition de fonctions

1. Introduction à la composition de fonctions réelles

Tome 1

p. 18 à p. 20 no g)
Exercices : *Investissement* 3 p. 22 nos 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 20 b) , 20 d), 21 c) et 22 f)

2. Composition d'une fonction linéaire avec une fonction réelle quelconque

La composée d'une fonction linéaire *f* avec une fonction quelconque *g* conserve le type de la fonction g.

Annexe 2 p.13

3. Composition de deux fonctions réelles diverses

a) Exercices divers

Tome 1		Tome 2
p. 38 no 2 a) et b)	p. 141 no 22 e)	p. 257 nos 23 e) et f)
p. 59 no 22 a)	p. 151 no 51	
p. 82 no 13	p. 154 no 73	
p. 115 no f)	p. 160 no 10	
p. 130 no 24	p. 381 no 57	

b) Exercices supplémentaires

Cahier

p. 22 no 3
p. 26 no 6
p. 38 no 3
p. 58 nos 4 a) b) et d)

C. Opérations sur les fonctions

1. Introduction

Tome 1

p. 20 et 21
Exercices : *Investissement* 3 p. 22 nos 3, 4, 7, 11, 12, 20 a) 20 c), 21 a), 21 b), 22 a) à e)

2. Exercices divers

Tome 1

p. 37 no g 6)
p. 37 nos l 3) à l 6) et no m)
p. 38 nos 2 c) à 2 e)
p. 59 nos 22, 23
p. 60 nos 24 a), 24 b) et no 25
p. 63 nos 37 à 41,
p. 64 no 42
p. 97 nos 15 à 17
p. 115 no e)
p. 118 nos 21 à 24
p. 130 no 25
p. 141 nos 22 a) à d) et no 23
p 154 nos 70 à 72, nos 74, 75, 77
p. 158 no 1
p. 382 no 58

Tome 2

p. 257 nos 23 a) à d) et no 24
p. 265 no 15 a) et b)
p. 267 nos d) et e)
p. 299 no 18
p. 300 no 22
p. 302 no 31
p. 303 no 37

3. Exercices supplémentaires

Cahier

p. 22 nos 1, 2
p. 38 no 1
p. 58 no 1, no 3
Annexe 3, p.27

II. INÉQUATIONS

A. Résolution d'inéquations

Tome 1

1. Du 1er degré à une variable

a) Résolution graphique

p. 33

b) Résolution algébrique

p. 34 à 36
Exercices : *Investissement* 4 p. 39 nos 10, 12, 13

2. Du second degré à une variable

a) Résolution graphique

p. 51 à 53 no h)
Exercices : *Investissement* 5 p. 59 nos 18, 19 et 21

b) Résolution algébrique

p. 53 à p. 54
Exercices : *Investissement* 5 p. 59 no 20

3. Avec valeur absolue

a) Résolution graphique

p. 85 et 86 no f)
Exercices : *Investissement* 8 p. 88 nos 3, 5, 6

b) Résolution algébrique

p. 86 à p. 88
Exercices : *Investissement* 8 p. 89 no 7

4. Avec racine carrée

a) Résolution graphique

p. 111 à p.112
Exercices : *Investissement* 11 p. 116 no 15

b) Résolution algébrique

Exercices : *Investissement* 11 p. 116, no 14

5. Exercices supplémentaires

Cahier

p. 18
p. 30 no 1

p. 37

Feuilles

p. 175 no 2 et no 3 b)

B. Résolution de problèmes contenant une inéquation

1. Du second degré à une variable

Annexe 4, p. 37 no 3, p. 38 no 5

2. Avec valeur absolue

Tome 1

p. 90 nos 9, 10 et 11
p 146 nos 26

Feuilles

No 9 c)

3. Avec racine carrée.

p. 150 no 44 Tome 1

p. 30 no 2 c) Cahier

4. Exercices supplémentaires

Annexe 4, p.37

III. RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE ET DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

A. Révision

Tome 1

1. Les étapes d'une démonstration

p. 257 à p. 262
Exercices : *Investissement* 2 p. 263

2. Relations métriques dans le triangle rectangle

a) Démonstrations

p. 275 nos a) à e)
p. 278 no g)
p. 279 no e)
Investissement 4 p. 280, nos 1, 2, 6, 17, 21,22

b) Exercices et problèmes

p. 277 no f)
p. 278 no h)

p. 280 no f)
Investissement 4 p. 281, nos 3, 4, 5, 7, 9 à 16, 18
Maîtrise 4 p. 325 nos 22 à 28

3. Relations métriques dans le cercle

a) Définitions et démonstrations

p. 287 à 292
Investissement 5 p. 293, nos 7, 9,
p. 296 à 301
Investissement 6 p. 302, nos 6 et 7
p. 304 à 310
Investissement 7 p. 313, nos 7 à 11

b) Exercices et problèmes

Investissement 5 p. 292 nos 1 à 6, no 8 et nos 13 à 21
Investissement 6 p. 301 nos 1à 5
Investissement 7 nos 1à 6 et no 12
Maîtrise 4 p. 326 nos 29 à 35

B. Relations métriques dans le cercle et le triangle (nouveaux théorèmes)

1. Définitions et démonstrations

p. 315 à 317
Investissement 8 p. 319 nos 3 et 4
Math Express 4 - Liste des théorèmes. Porter une attention particulière au théorème de la bissectrice (le 1er – Voir Annexe ….)
Maîtrise 4 p. 329 nos 38 à 40
Capsule d'évaluation 4 p. 332 nos 1 à 3

2. Résolution de problèmes

Investissement 8 p. 318 nos 1, 2, nos 5 à 12
Maîtrise 4 p. 328 nos 36, 37, 44 à 50
Capsule d'évaluation 4 p. 332, nos 4 à 11

Feuilles 

Révision Géométrie (2) p. 185 et 186

IV. **ANNEXE 1** Tableau récapitulatif – fonction valeur absolue

	a > 0	**a < 0**
Règle	$f(x) = a\lvert x-h\rvert + k$	
Graphique	Un « V » ouvert vers le haut.	Un « V » ouvert vers le bas.
Domaine	IR	IR
Codomaine	$[k, \infty$	$-\infty, k]$
Zéro	0 si k > 0 1 si k = 0 2 si k < 0	0 si k < 0 1 si k = 0 2 si k > 0
Extrémum	Un minimum : k en h	Un maximum : k en h
Variation	Décroissante sur $-\infty, h]$ Croissante sur $[h, \infty$	Croissante sur $-\infty, h]$ Décroissante sur $[h, \infty$
Signe	Négative entre les zéros, positive autrement	Positive entre les zéros, négative autrement

V. ANNEXE 2 Exercices supplémentaires sur la composition de fonctions

A. Composition d'une fonction linéaire avec une autre fonction

1. La composée d'une fonction linaire avec une constante donne une fonction constante.

Exemple1

$f(x) = 2, \quad g(x) = 2x - 5$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x\text{-}5) = 2$

$f \circ g(x) = 2$

Exercice 1

Effectuez $g \circ f(x)$ avec les deux fonctions précédentes.

2. La composée d'une fonction linéaire avec une fonction linéaire donne une fonction linéaire.

Exemple2

$f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = 3x + 2$

$$
\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
&= f(3x+2) \\
&= 2(3x + 2) - 5 \\
&= 6x + 4 - 5 \\
&= 6x - 1
\end{aligned}
$$

- Le taux de variation de *f(x)* est 2, le taux de variation de *g(x)* est 3. Le taux de variation de $f \circ g(x)$ est de 6, c'est-à-dire le produit des taux de variation de *f(x)* et de *g(x).*

Exercice 2

Effectuez $g \circ f(x)$ avec les deux fonctions de l'exemple 2 afin de vérifier si le type linéaire sera conservé. Vérifiez également si le taux de variation de $g \circ f(x)$ est le produit des taux de variations de *f(x)* et de *g(x)*.

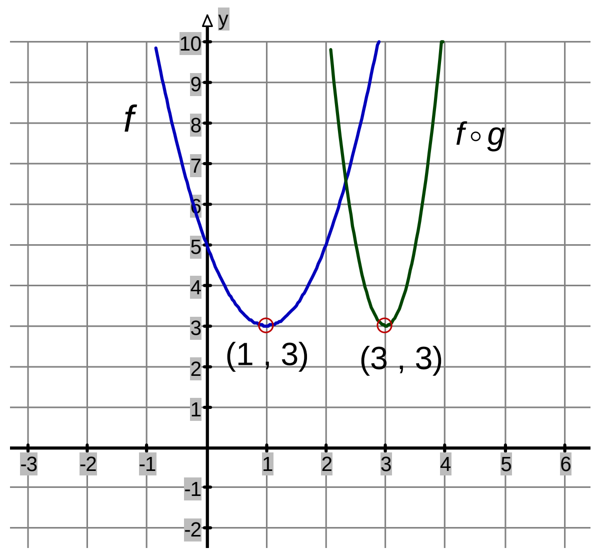
3. La composée d'une fonction linéaire avec une fonction quadratique donne une fonction quadratique

Exemple 3

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3, \quad g(x) = 2x - 5$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-5) \\ &= 2(2x-5-1)^2 + 3 \\ &= 2(2x-6)^2 + 3 \\ &= 2(2(x-3))^2 + 3 \\ &= 2 \times 2^2 (x-3)^2 + 3 \\ &= 8(x-3)^2 + 3 \end{aligned}$$

Observez le sommet de f et celui de $f \circ g$.
Ces deux sommets ont la même ordonnée.
Cela implique que ces deux fonctions ont la même image.



Exercice3

a) Effectuez $g \circ f(x)$ avec les fonctions de l'exemple précédent. Observez les valeurs de h (la valeur de l'abscisse du sommet) pour les fonctions *f* et $g \circ f$. Que remarquez-vous? Que pouvez-vous conclure concernant les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions f et $g \circ f$?

b) Soient $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$ et $g(x) = 4x + 1.$

Effectuez $g \circ f$ et $f \circ g$. Observez les valeurs de (h, k) dans chacun des cas.
Comparez les images et les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions f et g avec ceux de leurs composées. Notez vos observations.

4. La composée d'une fonction linéaire *f* avec une fonction *g* conserve le type de la fonction *g*.

Exercice 4

Effectuez les composées $g \circ f\left(x\right)$ et $f \circ g\left(x\right)$ pour chacune des paires de fonctions suivantes. Pour chaque numéro, faites les démarches suivantes.

- Identifiez les valeurs (h , k) de la fonction non linéaire.
- Identifiez les valeurs (h , k) de la composée.
- Comparez le domaine de la fonction non linéaire à celui de la fonction composée.
- Comparez l'image de la fonction non linéaire à celui de la fonction composée.
- Comparez les intervalles de croissance et/ou les intervalles de décroissance de la fonction non linéaire à ceux de la fonction composée.

a) $f\left(x\right) = 2\text{x} - 5$ et $g(x) = 2\left|3\left(\text{x} + \frac{1}{3}\right)\right| - 4$

b) $f(x) = 2\text{x} - 4$ et $g(x) = 3\sqrt{-\text{x} + 8} - 2$

c) $f\left(x\right) = 2\text{x} - 2$ et $g\left(x\right) = \left[\text{x} - 3\right] - 1$

d) $f\left(x\right) = 3\text{x} - 1$ et $g\left(x\right) = \dfrac{3}{\text{x} - 4} + 1$

Exercice 5

1. Soient $f(x) = log\,\text{x}$ et $g(x) = 2\text{x} + 3$

   a) Quelle est la règle de $f \circ g$?

   b) Comparez le domaine, l'image les intervalles de croissance et les asymptotes (s'il y a lieu) des fonctions *f, g* et $f \circ g$.

2. Soient $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = log(x + 2)$.

   Vrai ou faux.

   a) L'ordonnée à l'origine de $f \circ g$ est la même que celle de la fonction *g*.

   b) L'intervalle de décroissance de la fonction $f \circ g$ est le même que celui de la fonction *g*.

   c) Les fonctions *g* et $f \circ g$ ont le même domaine.

   d) L'image de la fonction $f \circ g$ est la même que celle de la fonction *f*.

3. Soient $g(x) = -5x + 5$ et $h(x) = sin\frac{\pi}{4}(x - 4)$

   Laquelle des affirmations suivantes est vraie.

   A. 6 est un zéro de la fonction $g \circ h$.

   B. La fonction $g \circ h$ est décroissante dans l'intervalle [4, 8].

   C. Dom $g \circ h$ = IR et image $g \circ h$ = [-5 , 5].

   D. La période de la fonction $g \circ h$ est 8 et son déphasage est de -4.

4. Soient $f(x) = 3^x + 2$ et $g(x) = -x + 1$.

   Vrai ou faux

   a) L'image de la fonction *f* est la même que celle de la fonction $f \circ g$.

   b) L'asymptote de la fonction *f* est la même que celle de la fonction $f \circ g$.

   c) L'ordonnée à l'origine des fonction $f \circ g$ et *g* sont les mêmes.

   d) Le domaine de la fonction $f \circ g$ est le même que celui de la fonction *f*.

B. Corrigé des exercices 1 à 5 de l'annexe 2

Exercice 1

$f(x) = 2$ et $g(x) = 2x - 5$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2) \\ &= 2(2) - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

On peut conclure que $g \circ f$ donne une fonction constante.

Exercice 2

$f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = 3x + 2$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x - 5) \\ &= 3(2x - 5) + 2 \\ &= 6x - 15 + 2 \\ &= 6x - 13 \end{aligned}$$

Le type « fonction linéaire » est conservé. Le taux de variation de la fonction $g \circ f$ est le produit du taux de variation de la fonction *f* et de la fonction *g*.

Exercice 3

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 5$

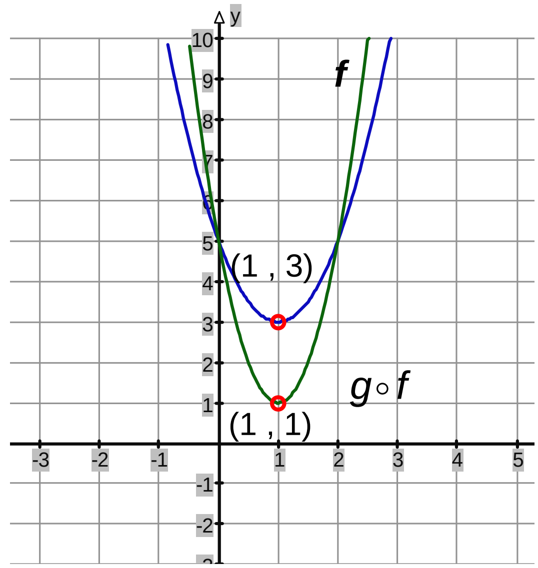
$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g\left(2(x-1)^2 + 3\right)$

$= 2\left(2(x-1)^2 + 3\right) - 5$

$= 4(x-1)^2 + 6 - 5$

$= 4(x-1)^2 + 1$



Le sommet (h , k) de la fonction *f* est (1 , 3). Le sommet (h , k) de la fonction $g \circ f$ est (1 , 1).
L'intervalle de décroissance des fonctions *f* et $g \circ f$ est : $-\infty, 1]$.
L'intervalle de croissance des fonctions $g \circ f$ et *f* est : $[1, \infty$

$f(x) = -3(x+4)^2 - 1$ et $g(x) = 4x + 1$

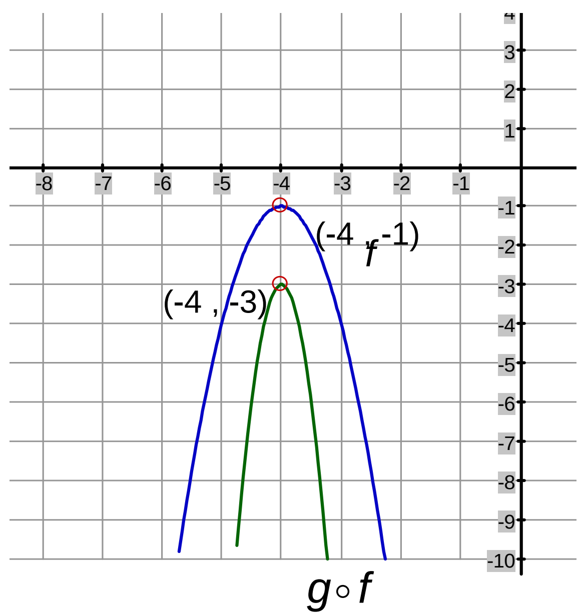
$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g\left(-3(x+4)^2 - 1\right)$

$= 4\left(-3(x+4)^2 - 1\right) + 1$

$= -12(x+4)^2 - 4 + 1$

$= -12(x+4)^2 - 3$



Le sommet (h , k) de la fonction f est (-4 , -1).
Le sommet (h , k) de la fonction $g \circ f$ est (-4 , -3).
L'intervalle de croissance des fonctions f et $g \circ f$ est : $-\infty, -4]$.
L'intervalle de décroissance des fonctions $g \circ f$ et f est : $[-4, \infty$

$f(x) = -3(x+4)^2 - 1$ et $g(x) = 4x+1$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(4x+1)$

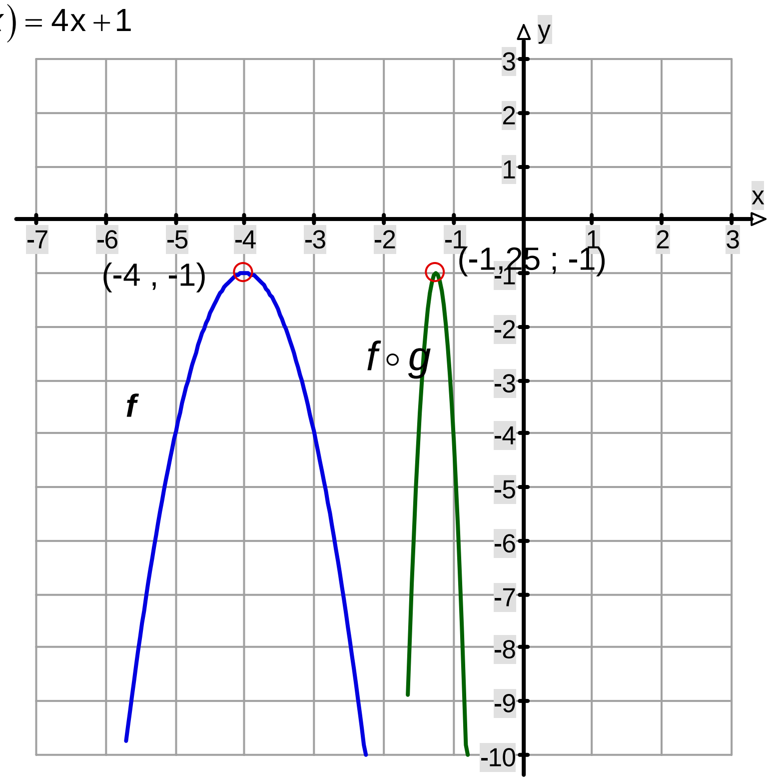
$= -3((4x+1)+4)^2 - 1$

$= -3(4x+5)^2 - 1$

$= -3\left(4\left(x+\frac{5}{4}\right)\right)^2 - 1$

$= -3 \times 4^2 \left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - 1$

$= -48\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - 1$

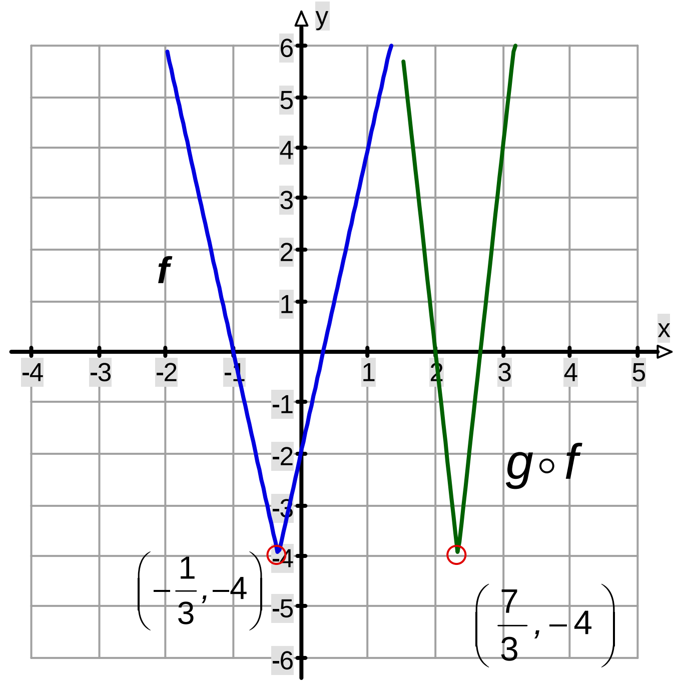


Le sommet (h , k) de la fonction *f* est (-4 , -1).
Le sommet (h , k) de la fonction $f \circ g$ est $\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$

L'image des fonctions *f* et $f \circ g$ est : $]-\infty, -1]$.

Exercice 4

a) $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = 2\left|3\left(x + \frac{1}{3}\right)\right| - 4$



$g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x-5) \\ &= 2\left|3\left(2x - 5 + \frac{1}{3}\right)\right| - 4 \\ &= 2\left|3\left(2x - \frac{14}{3}\right)\right| - 4 \\ &= 2\left|6\left(x - \frac{7}{3}\right)\right| - 4 \end{aligned}$$

Sommet de la fonction *g* : $\left(-\frac{1}{3}, -4\right)$

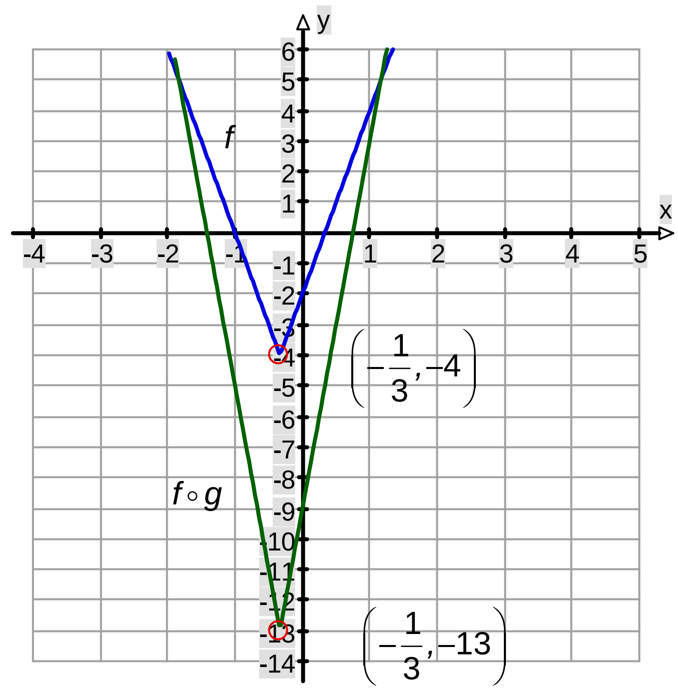
Sommet de la fonction $g \circ f$: $\left(\frac{7}{3}, -4\right)$

Les fonction *g* et $g \circ f$

- Ont la même image : $[-4, \infty$,
- le même domaine : $\mathbb{R}$,
- N'ont pas les mêmes intervalles de croissance et de décroissance.

$f \circ g$

$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right)$$
$$= f\left(2\left|3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right|-4\right)$$
$$= 2\left(2\left|3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right|-4\right)-5$$
$$= 2\left|6\left(x+\frac{1}{3}\right)\right|-8-5$$
$$= 2\left|6\left(x+\frac{1}{3}\right)\right|-13$$



Sommet de la fonction g : $\left(-\frac{1}{3},-4\right)$

Sommet de la fonction $f \circ g$: $\left(-\frac{1}{3},-13\right)$

Les fonctions g et $g \circ f$

- Ont le même intervalle de décroissance : $\left.-\infty,-\frac{1}{3}\right]$
- le même Intervalle de croissance : $\left[-\frac{1}{3},\infty\right.$
- Le même domaine $\mathbb{R}$
- N'ont pas la même image.

b) $f(x) = 2x-4$ et $g(x) = 3\sqrt{-x+8}-2$

Écrivons *g* sous la forme paramétrique :

$$g(x) = 3\sqrt{-1(x-8)}-2$$

$g \circ f$

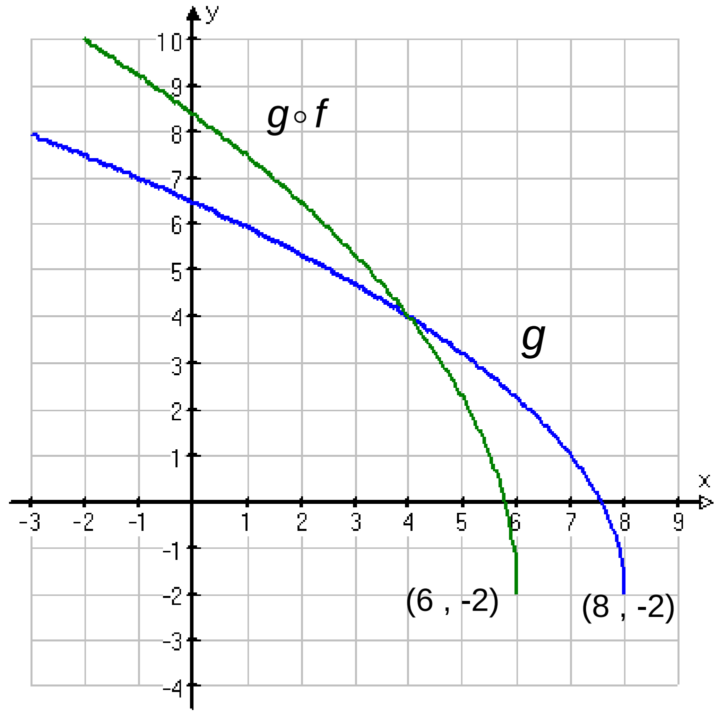
$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x-4) \\ &= 3\sqrt{-(2x-4-8)}-2 \\ &= 3\sqrt{-2(x-6)}-2 \end{aligned}$$

Le sommet de la fonction *g* est $(8,-2)$

Le sommet de la fonction $g\circ f$ est $(6,-2)$.

Les fonctions *g* et $g\circ f$

- Ont la même image : $[-2,\infty$
- N'ont pas le même domaine
- N'ont pas le même intervalle de décroissance.



$f \circ g$

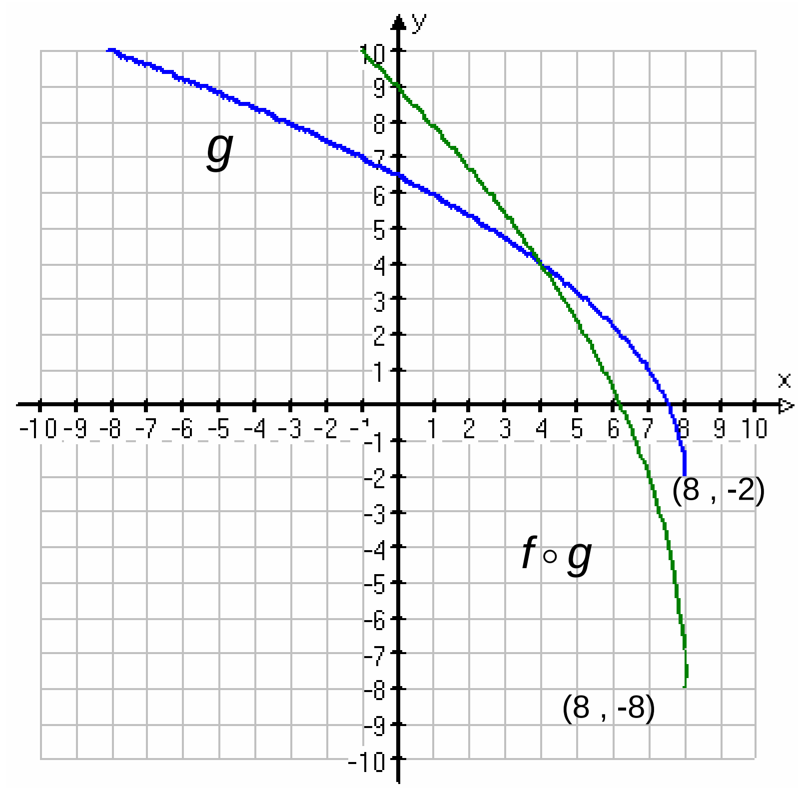
$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(3\sqrt{-(x-8)}-2\right) \\ &= 2\left(3\sqrt{-(x-8)}-2\right)-4 \\ &= 6\sqrt{-(x-8)}-4-4 \\ &= 6\sqrt{-(x-8)}-8 \end{aligned}$$

Le sommet de la fonction $f\circ g$ est

(-8 , -8)

Les fonctions *g* et $f\circ g$

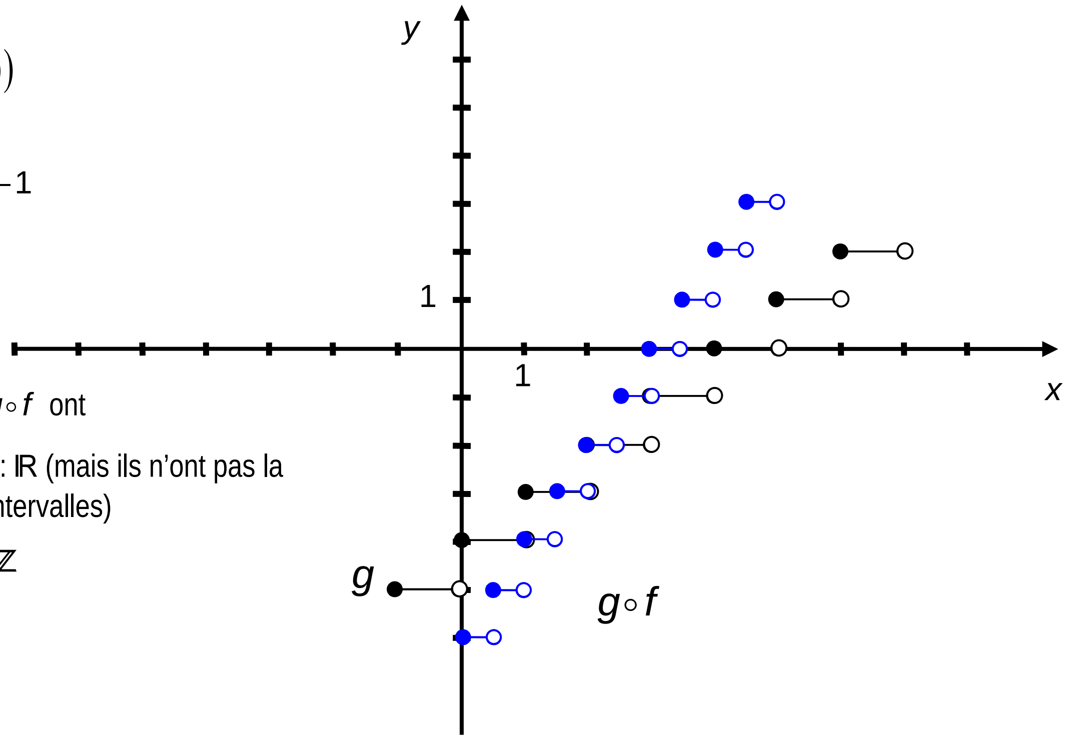
- Ont le même domaine : $-\infty,8]$
- N'ont pas la même image,
- Ont le même intervalle de décroissance : $-\infty,8]$



c) $f(x)=2x-2$ et $g(x)=[x-3]-1$

$g \circ f$

$$g\circ f(x)=g(f(x))$$
$$=g(2x-2)$$
$$=[(2x-2-3)]-1$$
$$=[2x-5]$$
$$=\left[2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]-1$$

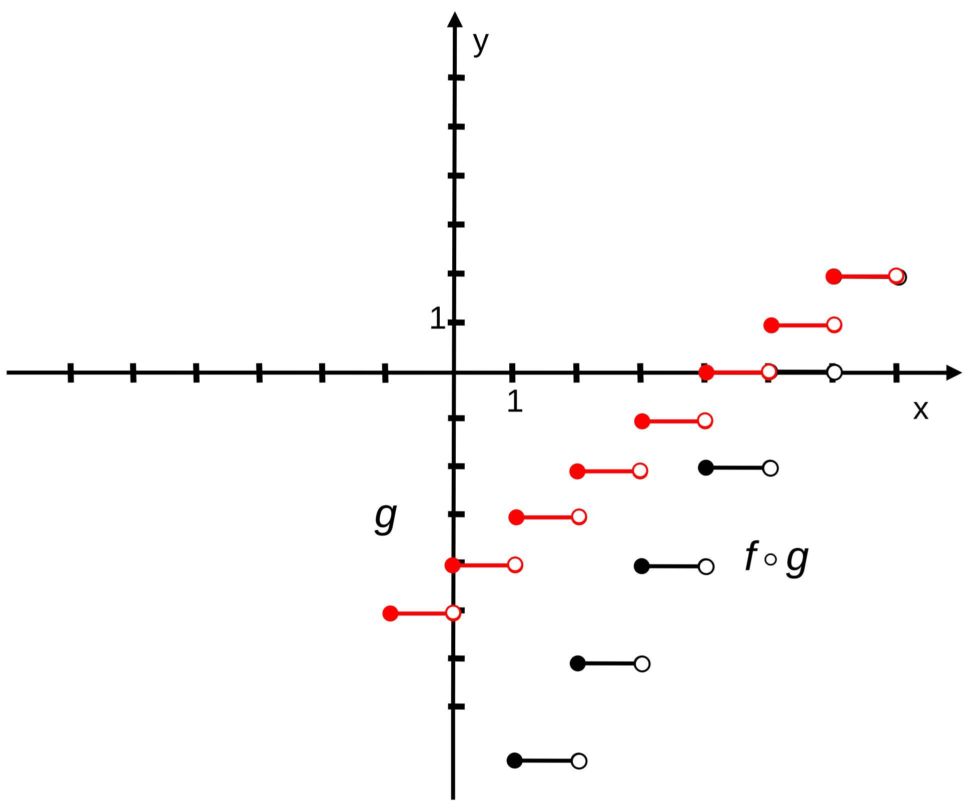


Les fonctions $g$et $g\circ f$ ont

- Le même domaine : IR (mais ils n'ont pas la même longueur d'intervalles)
- La même image : $\mathbb{Z}$

$f \circ g$

$$f(g(x))=f(g(x))$$
$$=f([x-3]-1)$$
$$=2([x-3]-1)-2$$
$$=2[x-3]-2-2$$
$$=2[x-3]-4$$

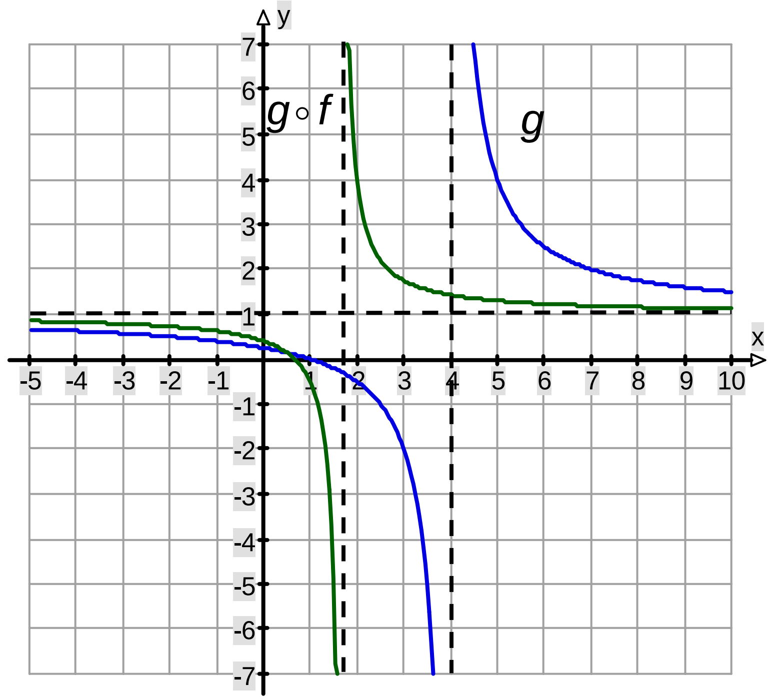


Les fonctions g et $f\circ g$

- ont le même domaine IR.
- n'ont pas la même image.

d) $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\dfrac{3}{x-4}+1$

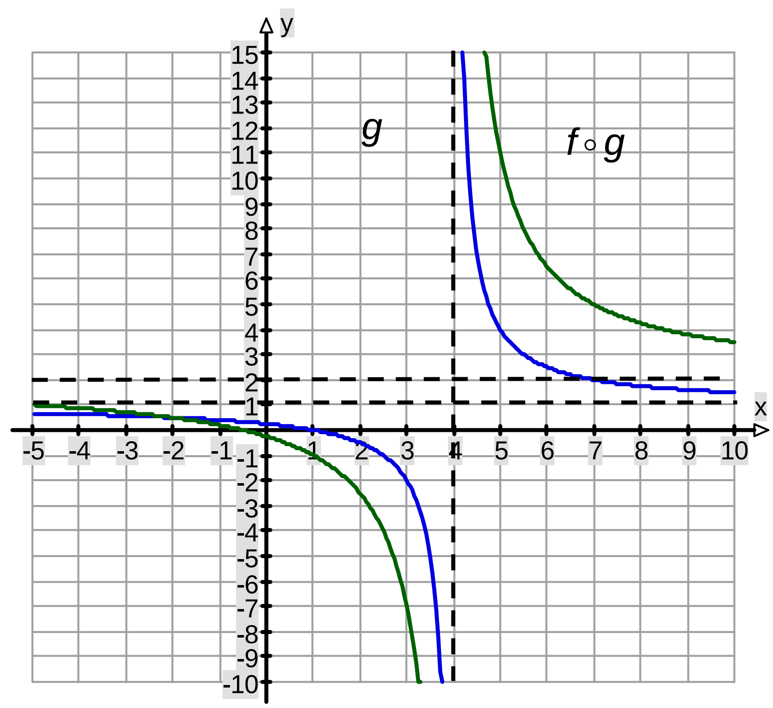
$g\circ f$



$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x-1) \\ &= \frac{3}{3x-1-4}+1 \\ &= \frac{3}{3x-5}+1 \\ &= \frac{3}{3\left(x-\frac{5}{3}\right)}+1 \end{aligned}$$

- Asymptote horizontale des fonctions g et $g\circ f$: y = 1
- Les fonctions g et $g\circ f$ n'ont pas le même domaine.
- Elles n'ont pas les mêmes intervalles de décroissance.
- Les fonctions g et $g\circ f$ ont la même image : $-\infty,1[\ \cup\ ]1,\infty$

$f\circ g$



$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{3}{x-4}+1\right) \\ &= 3\left(\frac{3}{x-4}+1\right)-1 \\ &= \frac{9}{x-4}+3-1 \\ &= \frac{9}{x-4}+2 \end{aligned}$$

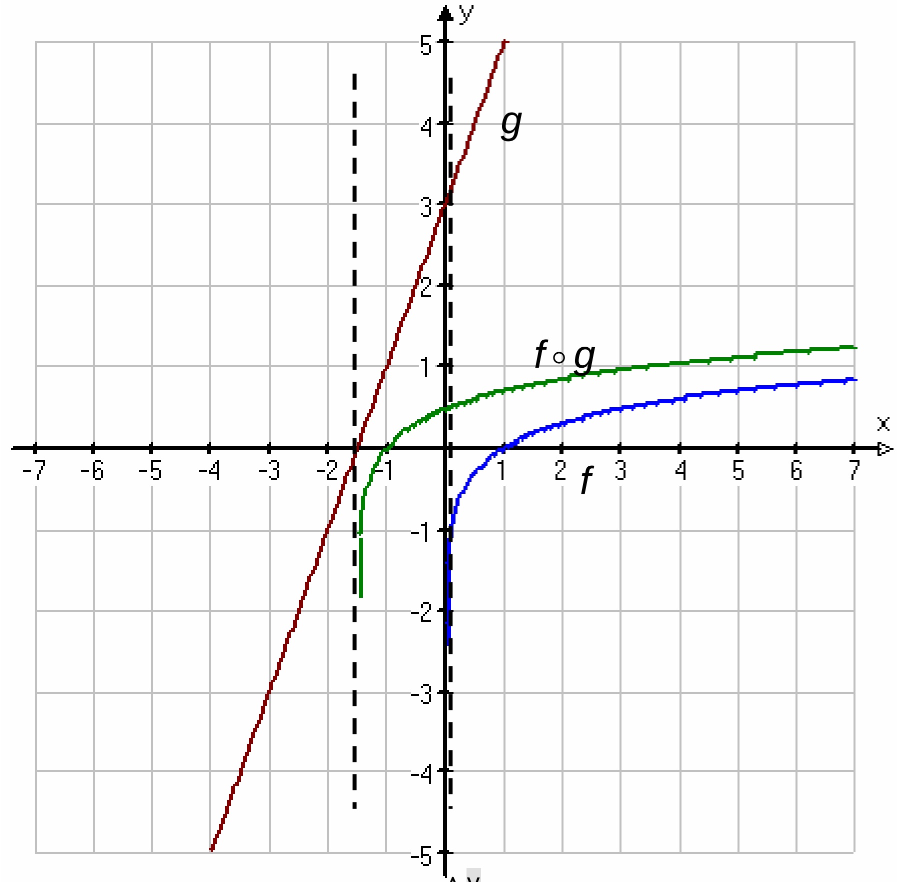
- Les fonctions g et $f\circ g$ ont le même domaine et les mêmes intervalles de décroissance: $-\infty,4[\ \cup\ ]4,\infty$.
- Elles n'ont pas la même image.

Exercice 5

1.

a) $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right)$
$= log(2x + 3)$

b)



- Aucune des fonctions n'a le même domaine.
- Toutes les fonctions ont la même image.
- Le zéro de la fonction g correspond à la valeur de l'asymptote de la fonction $f \circ g$
- Toutes les fonctions sont croissantes mais aucune de ces fonctions n'a le même intervalle de croissance.

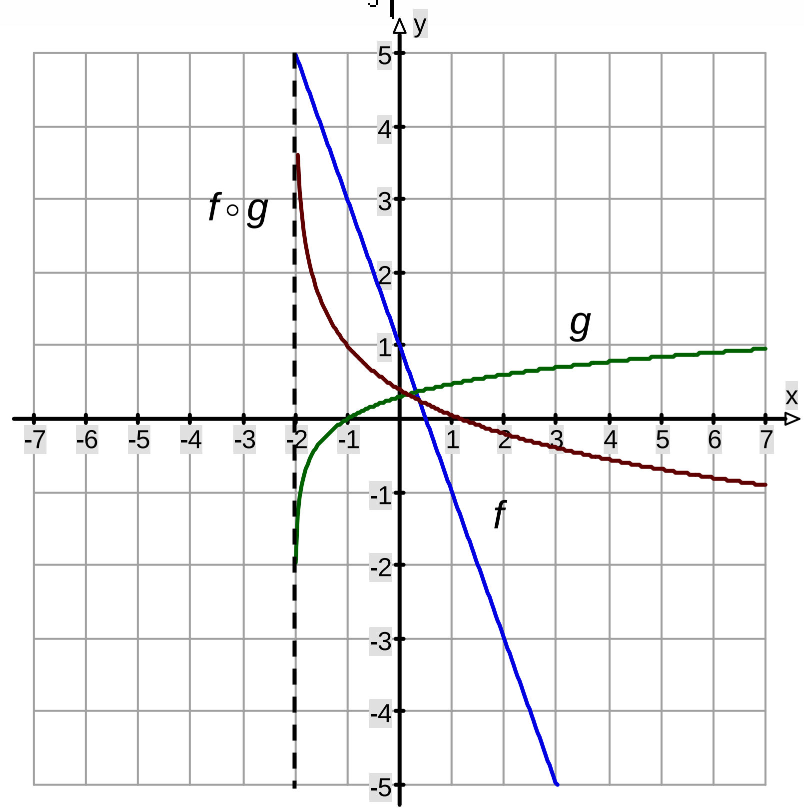
2.

a) Faux

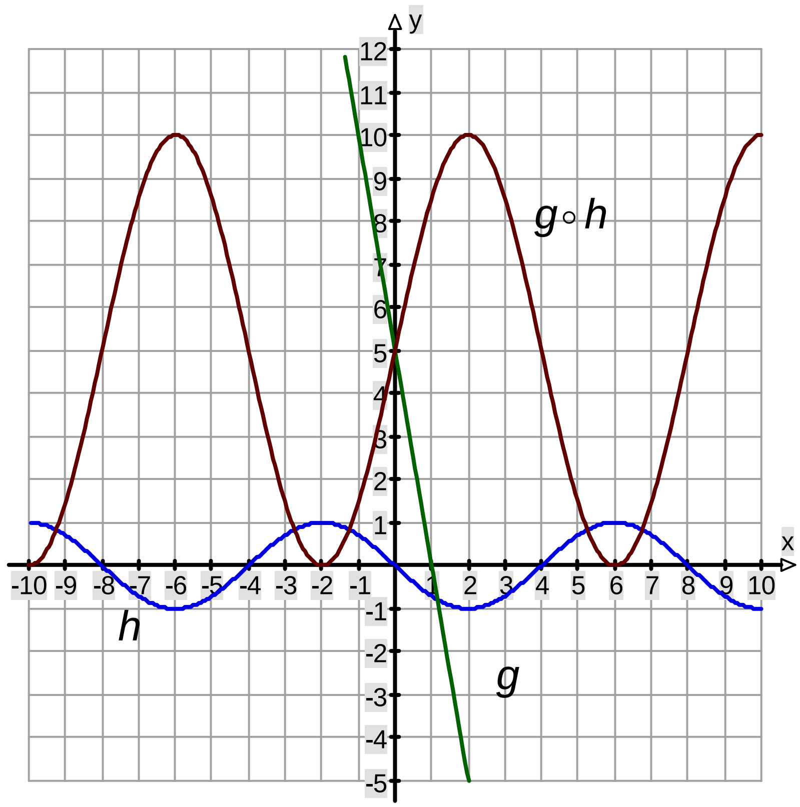
b) Faux

c) Vrai

d) Faux



3. A



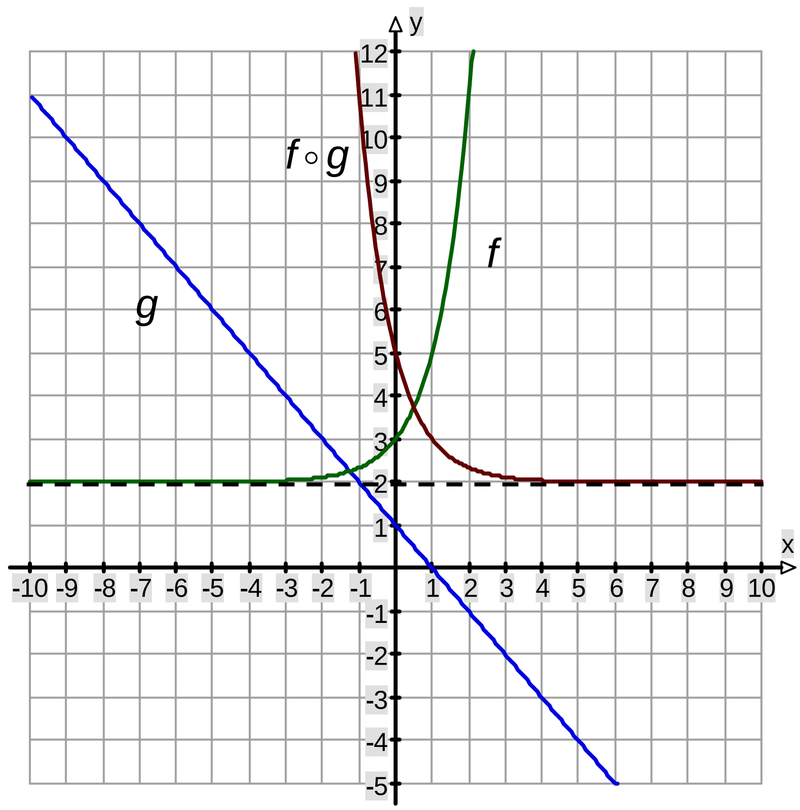
4.

a) Vrai

b) Vrai

c) Faux

d) Faux



VI. ANNEXE 3 Exercices supplémentaires sur les opérations sur les fonctions

A. Exercice 1

1. Soit *f(x)* = x et *g(x)* = x + 2. Trouvez la fonction produit $f \cdot g$ et tracez le graphique cartésien de cette fonction.
   a) Comparez les domaines de *f*, *g* et de $f \cdot g$.
   b) Comparez les images de *f*, *g* et $f \cdot g$.
   c) Quels sont les zéros de *f* et de *g*?
   d) Quels sont les zéros de $f \cdot g$? Comparez-les aux zéros de *f* et de *g*.
   e) Comparez les signes des fonctions *f* et *g* avec les signes de la fonction $f \cdot g$. Quel lien existe-t-il entre les signes des deux fonctions et le signe de la fonction produit?

2. Soit *f(x)* = -x - 2 , *g(x)* = x + 1. Trouvez les règle de $\frac{f}{g}$ et de $\frac{g}{f}$ et tracez les graphiques cartésiens de ces fonctions.
   a) Calculez les asymptotes des deux fonctions quotients.
   b) Quel est le lien entre les asymptotes verticales et les zéros des fonctions placées au dénominateur?

3. Soit $f(x) = 5|x|$ et $g(x) = |x| - 3$. Effectuez *f* + *g*. Tracez le graphique des trois fonctions.
   a) Comparez le sommet de *f* + *g* avec sommet de la fonction *g*, que constatez-vous?

4. Soit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Calculez *f - g*. Tracez le graphique de *f, g* et $f - g$.

   a) Comparez le domaine et l'image de chacune de ces fonctions? Que constatez-vous?

   b) Quelles fonctions ont la même concavité?

   c) Comparez les maxima et minima des fonctions *f, g* et $f - g$.

5. Soit *f(x)* = 3 et g*(x)* = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

   a) Tracez les graphiques des fonctions *f*, *g* et *f* + *g*.

   b) Comparez l'ordonnée à l'origine de la fonction *f* + *g* à l'ordonnée à l'origine de la fonction *g*.

   c) Comparez l'image de la fonction *f* + *g* à l'image de la fonction *g*.

   d) Tracez le graphique de la fonction $f \cdot g$.

   e) Comparez l'ordonnée à l'origine et l'image de la fonction *g* à celle de $f \cdot g$.

6. Soit *g(x)* = 2^x et *h(x)* = $\log_2 x$

   a) Tracez les graphiques des fonctions *g*, *h* et $g + h$.

   b) Comparez le domaine de la fonction $g + h$ avec les domaines des fonctions *g* et *h*. Que pouvez-vous conclure?

   c) Quelle est l'asymptote de la fonction *g*? Quelle est l'asymptote de la fonction $g + h$?

7. Soit $f(x) = sin(x + \pi)$ et $g(x) = -2$.

   a) Quelle est la règle de la fonction $\frac{f}{g}$?

   b) Faites les graphiques des fonctions *f, g* et $\frac{f}{g}$.

   c) Comparez la période de la fonction $\frac{f}{g}$ à celle de la fonction *f*. Quelle influence la fonction *g* a-t-elle eu sur cette période?

   d) Quelle influence la fonction *g* a-t-elle eu sur l'amplitude de la fonction $\frac{f}{g}$ si vous la comparez à l'amplitude de la fonction *f*?

e) Dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, comparez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction *f* avec ceux de la fonction $\frac{f}{g}$. Que pouvez-vous conclure?

8. Soit *f(x)* = sin(x) et *g(x)* = cos(x)

   Vrai ou faux.

   a) Dans l'intervalle $\left[-2\pi, 2\pi\right]$, les intervalles de croissance de la fonction $f+g$ sont les mêmes que ceux de la fonction *f*.

   b) Le maximum de la fonction $f+g$ est égal à $\sqrt{2}$.

   c) La période de la fonction $f+g$ est la même que celle de la fonction *f*.

   d) La fonction $f+g$ est positive dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

   e) La fonction $f+g$ est croissante dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

9. Soit $f(x) = sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right)$ et $h(x) = 2$ où x $\in \left[0, 4\pi\right]$

   Vrai ou faux.

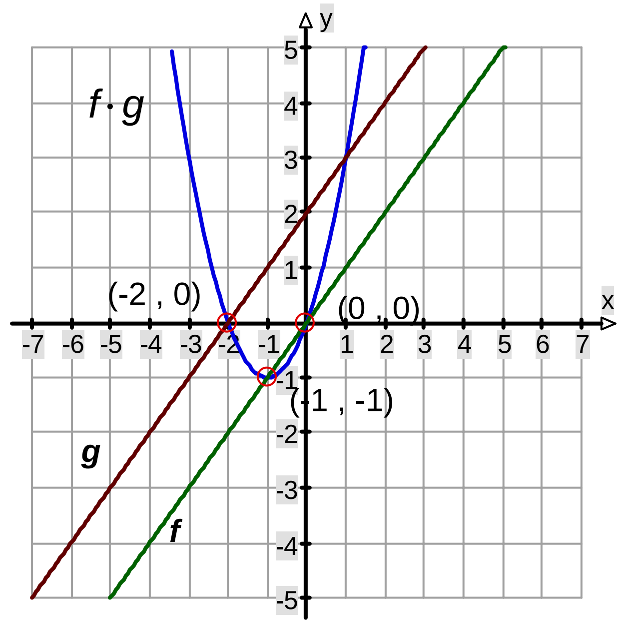
   a) Le maximum de la fonction *f* est le même que celui de la fonction $f \cdot h$.

   b) Les fonction *f* et $f \cdot h$ ont comme intervalles de croissance $\left[0, \pi\right]$ et $\left[3\pi, 4\pi\right]$.

   c) Les zéros de la fonction *f* et ceux de la fonction $f \cdot h$ sont les mêmes.

   d) La période de la fonction $f \cdot h$ est égale à la moitié de la période de la fonction *f*.

B. Corrigé - Exercice 1



1. $f \times g(x) = x^2 + 2x$

   a) Les trois fonctions ont le même domaine.

   b) Les fonctions *f* et *g* ont comme image ℝ, la fonction $f \cdot g$ a comme image : $[-1,\infty$

   c) La fonction *f* a comme zéro x = 0. La fonction *g* a comme zéro x = -2.

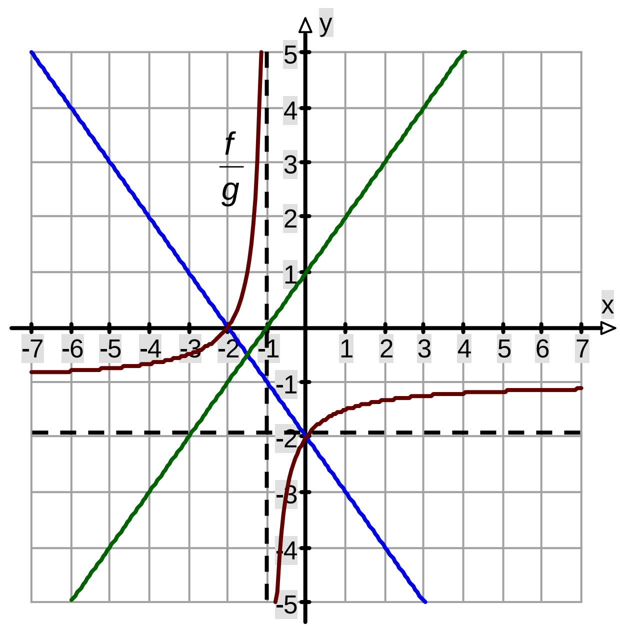
   d) La fonction $f \cdot g$ a comme zéros x = 0 et x = 2 donc les mêmes zéros que les fonctions *f* et *g*.

   e) Quand les fonctions f et g ont le même signe, c'est-à-dire dans les intervalles : $-\infty,-2]$ (où f et g sont négatives) et $[0,\infty$ (où f et g sont positives), la fonction $f \cdot g$ est positive. Dans l'intervalle où les fonctions f et g n'ont pas le même signe : $[-2,0]$ (où f est positive et g est négative), la fonction $f \cdot g$ est négative.

2.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{-x-2}{x+1}$$

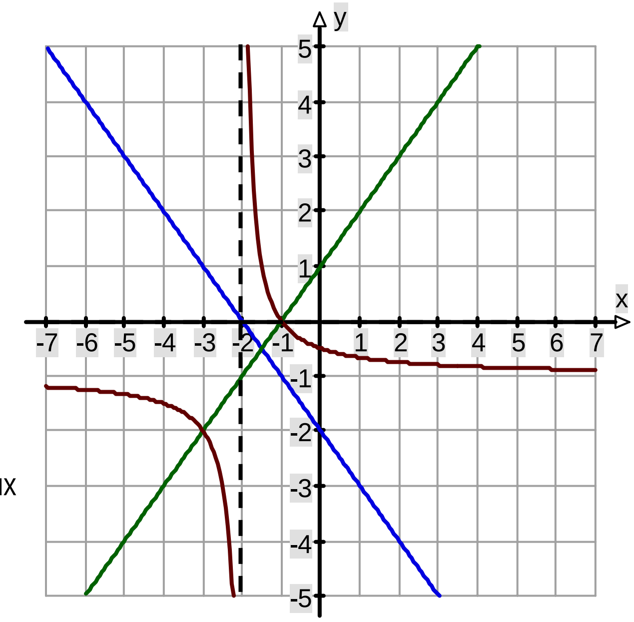
$$= \frac{-1}{x+1} - 1$$



   a) Asymptote horizontale : y = -1

   Asymptote verticale : x = -1

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{x+1}{-x-2}$$
$$= \frac{-1}{-x-2} - 1$$
$$= \frac{1}{x+2} - 1$$



Asymptote horizontale : y = -1

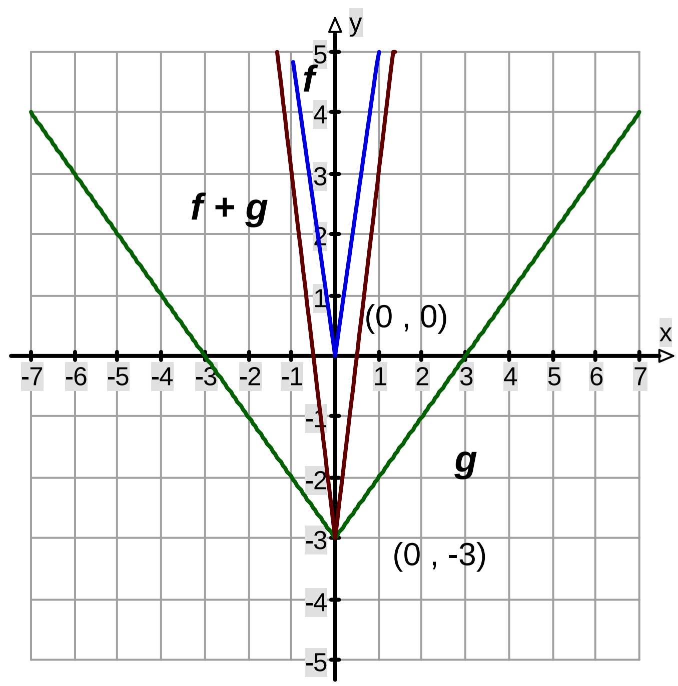
Asymptote verticale : x = -2

b) Les asymptotes verticales correspondent aux zéros des fonctions placées aux dénominateurs.

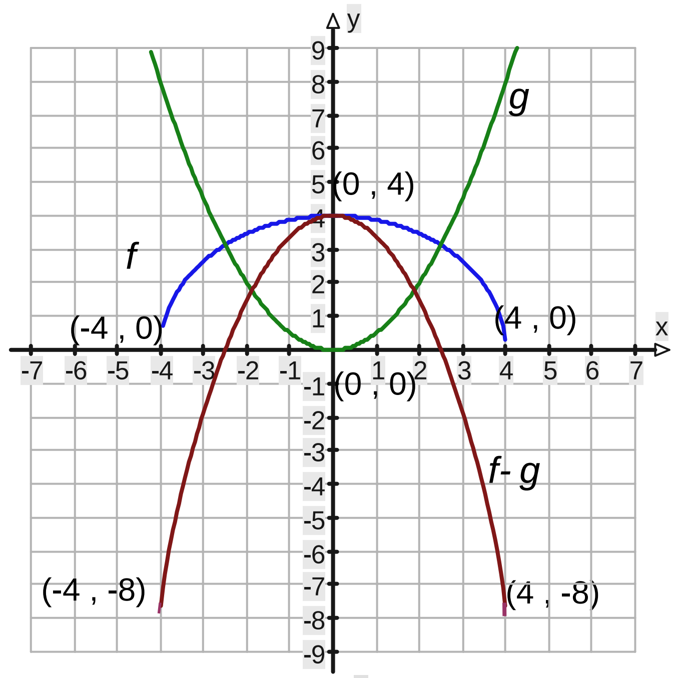
3.

$$(f+g)(x) = 5|x| + |x| - 3$$
$$= 6|x| - 3$$

a) Le sommet de *g* et le sommet de *f* + *g* sont les mêmes.



4.



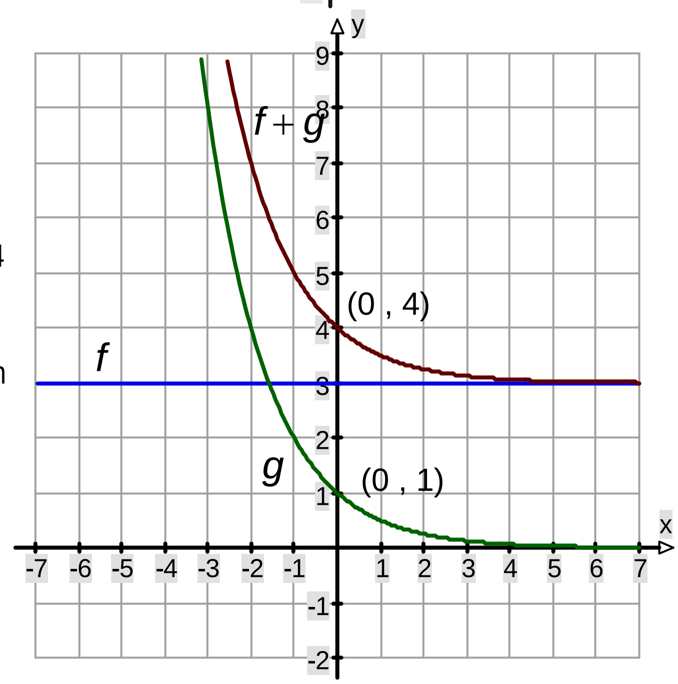
a) $(f-g)(x)=\dfrac{2\sqrt{16-x^2}-x^2}{2}$

b) Le domaine de la fonction *f- g* est le même que celui de la fonction *f* : $[-4,4]$. Aucune des fonctions n'a la même image.

c) Les fonctions *f* et *f- g* ont la même concavité.

d) Les fonctions *f* et *f- g* ont le même maximum : 4.

5.

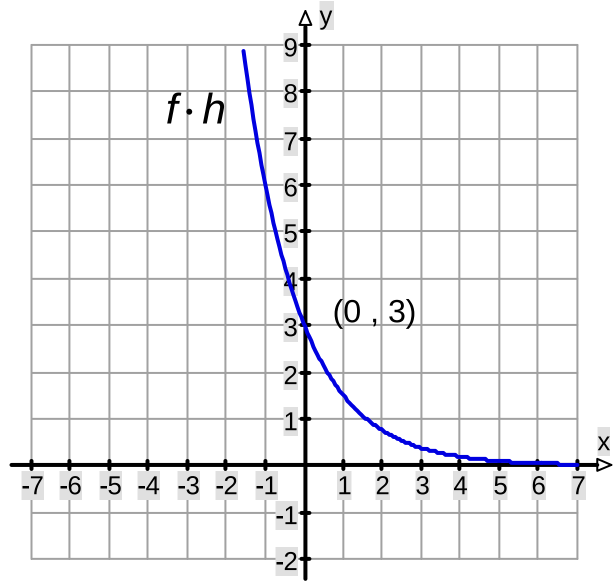


$$(f+g)(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$$

a) L'ordonnée à l'origine de la fonction $f+g$ est 4 tandis que celle de la fonction *g* est 1. L'ordonnée à l'origine de g a subit une translation verticale de 3 unités suite à l'addition de la fonction *f*.

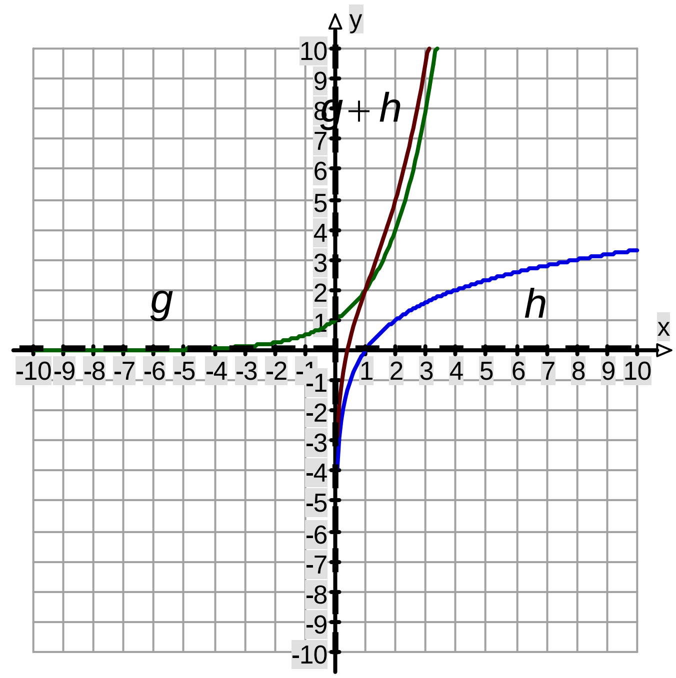
b) L'image de la fonction *g* est : $]0,\infty$. L'image de la fonction $f+g$ est : $]3,\infty$. La borne inférieure de l'image de $f+g$ a 3 de plus que celle de *g*. Tous les points de la fonction $f+g$ on subit une translation équivalente à la valeur de la fonction f.

c)



d) La fonction *g* a comme ordonnée à l'origine 1 tandis que la fonction $f \cdot h$ a comme ordonnée à l'origine 3. Cependant, les fonctions g et $f \cdot h$ ont la même image : $]0, \infty$. Donc, la multiplication d'une fonction exponentielle par une fonction constante positive n'influence pas l'image de la fonction exponentielle.

6.



a)

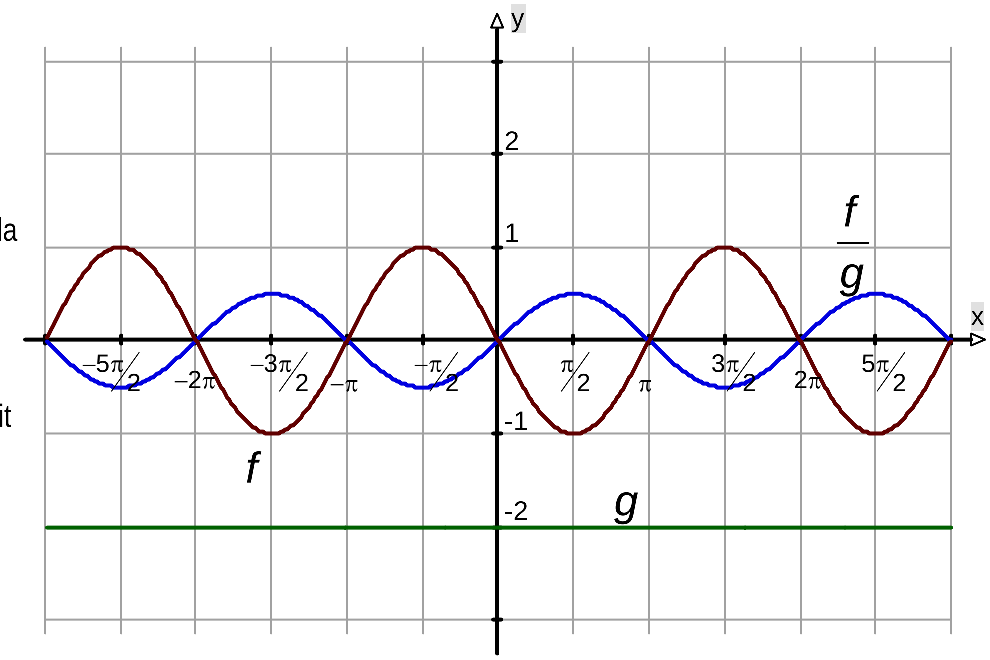
b) Les fonctions *h* et *g* + *h* ont le même domaine : $]0, \infty$

c) L'asymptote de la fonction *g* est y = 0 tandis que l'asymptote de la fonction *g* + *h* est x = 0. Les deux fonctions n'ont donc pas la même asymptote. Par contre, les fonctions *h* et *g* + *h* ont la même asymptote : x = 0.

7.

a) $$\frac{f}{g}(x) = \frac{sin(x+\pi)}{-2}$$
$$= -\frac{sin(x+\pi)}{2}$$

b)

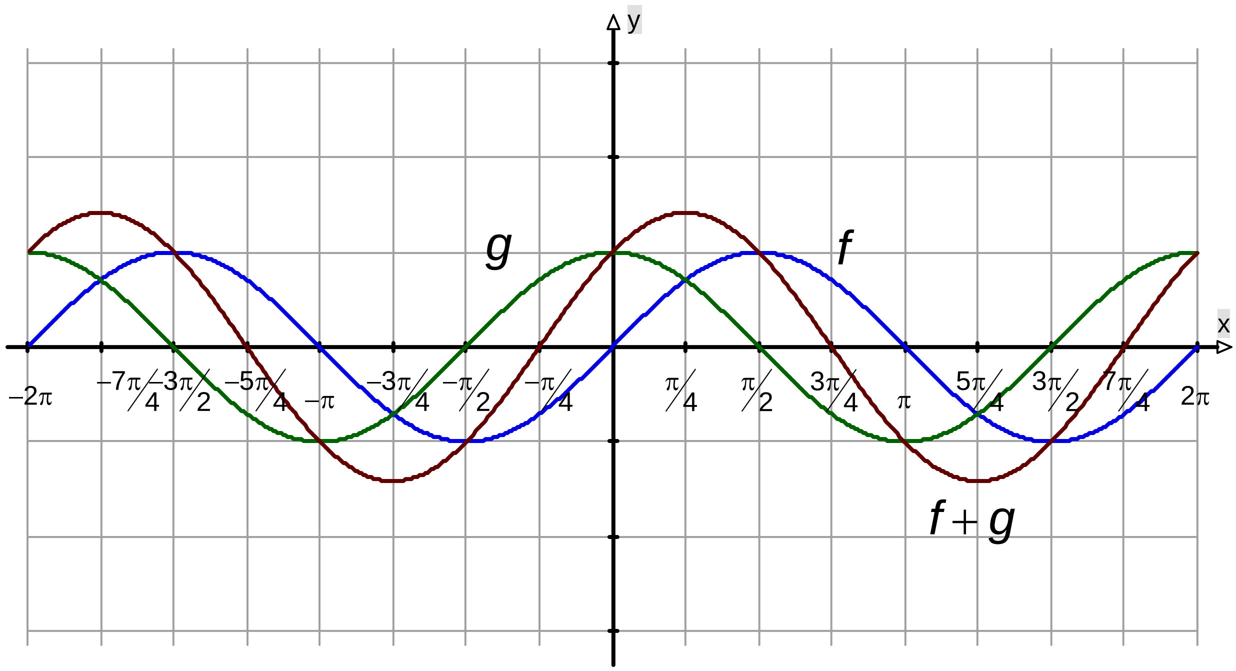


c) Les deux fonctions ont la même période : 2π. Donc, la fonction *g* n'a eu aucune influence sur la période de la fonction f lorsqu'on a fait le quotient.

d) L'amplitude de la fonction *f* a été divisée par 2 lorsqu'on a fait l'opération : $\frac{f}{g}$.

e) Les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction *f* et de la fonction $\frac{f}{g}$ sont inversés. Lorsque la fonction *f* est croissante, la fonction $\frac{f}{g}$ est décroissante et vice-versa. La division de fa fonction *f* par un nombre négatif a eu l'effet d'inverser les périodes de croissance et de décroissance.

8.



a) Faux

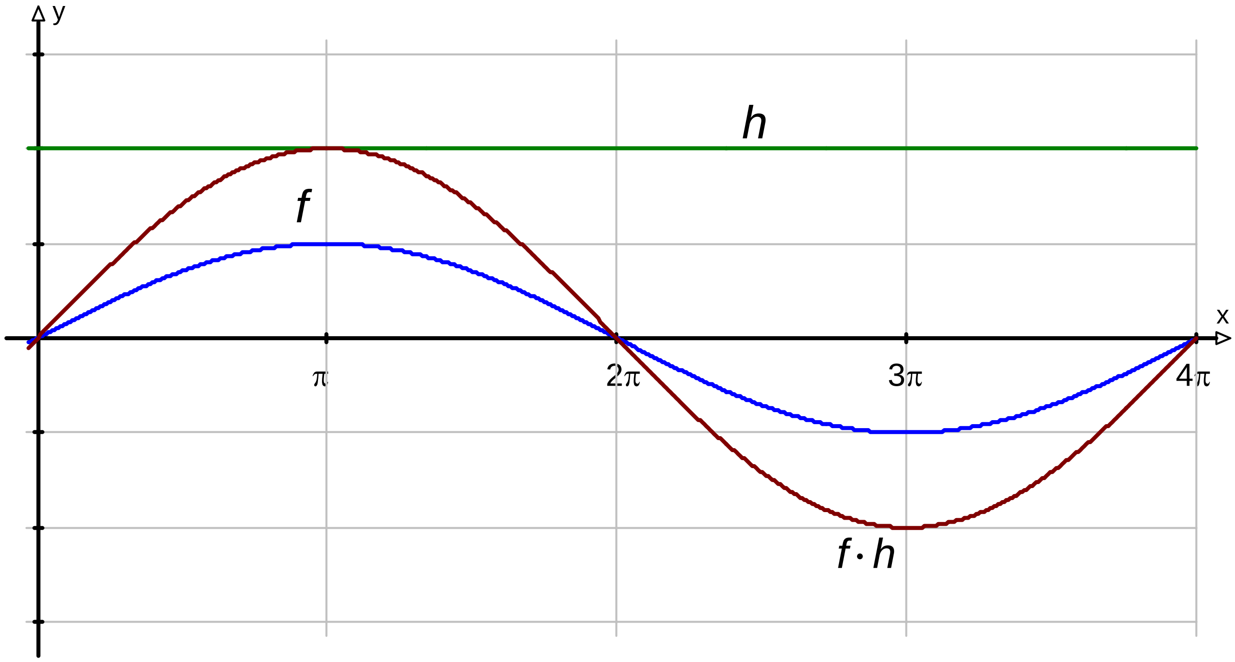
b) Vrai

c) Vrai

d) Vrai

e) Faux

9.



a) Faux

b) Vrai

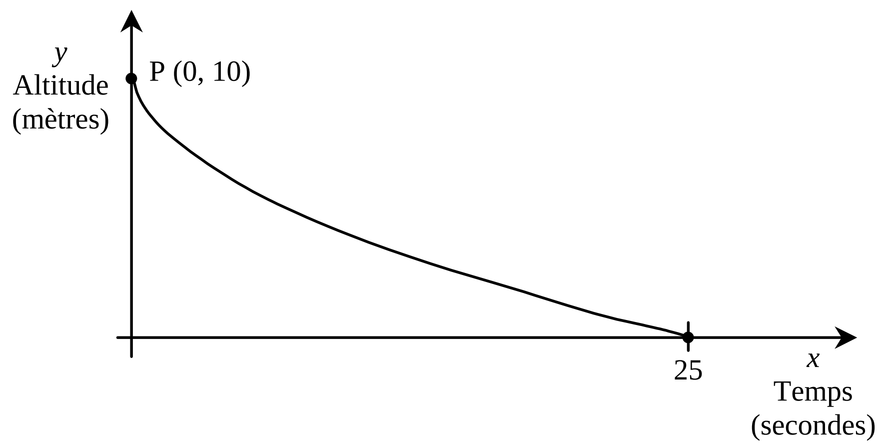
c) Vrai

d) Faux

VII. ANNEXE 4 Problèmes sur les inéquations

A. Problèmes

1. Dans un parc aquatique, Caroline descend sur une glissoire. Le graphique ci-dessous représente l'altitude de Caroline selon le temps de descente. La trajectoire de la glissoire obéit la fonction racine carrée $f(x) = -2\sqrt{x} + 10$.



Un dôme recouvre la glissoire entre le 4^e m et le 6^e m d'altitude formant ainsi un tunnel. Pendant combien de temps Caroline sera-t-elle dans le tunnel?

2. Dans le cadre d'une activité scientifique, Louise et Denis ont enregistré, sur une période de 24 heures, la température à l'extérieur de leur école. Au départ, le thermomètre indiquait -1 °C. La température minimale, atteinte 8 heures plus tard, a été de -5 °C. Les données enregistrées montrent que la température t(x) a varié en fonction du nombre d'heures x écoulées selon la règle : $t(x) = 0,5|x - 8| - 5$

   Pendant combien d'heures la température a-t-elle été inférieure ou égale à -3 °C?

3. Un objet est lancé dans les airs. La hauteur qu'il atteint en fonction du temps écoulé s'exprime par la formule :$h = -10x^2 + 60x$ où h est la hauteur en mètres et x est le temps en secondes.

   Pendant combien de temps le projectile est-il à une hauteur supérieure à 80 m?

4. Cette année, les membres du comité des finissantes et des finissants d'une école ont décidé de publier un album souvenir.

   Ils ont établi que le profit P(a) en dollars, en vendant l'album 5 $, peut être estimé par l'équation suivante : $P(a) = 5\sqrt{9a - 3150} - 100$ où a désigne le nombre d'albums souvenir à faire imprimer. Au minimum, combien d'albums souvenir le comité doit-il vendre pour réaliser un profit supérieur à 100 $?

5. À la bourse, on a acheté une action valant 2 $. Une analyse montre que, au cours des 8 mois suivant l'achat, la valeur V(t) de l'action a évolué selon la règle $V(t) = \frac{-1}{4}t^2 + 2t + 2$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis la date de l'achat.

   Pendant combien de mois la valeur de cette action a-t-elle été d'au moins 5 $?

6. Une association achète des t-shirts dans le but de les vendre pour financer ses activités. Ses dirigeants ont établi que le profit brut P (en milliers de dollars) est donné par l'équation $P(x) = 3\,|\,x - 20\,| + 36$ où x représente le prix de vente (en dollars) d'un t-shirt. L'association veut réaliser un profit brut de 24 000 $ en respectant la politique du prix minimal pour le client. Le profit brut est égal au prix de vente moins le prix d'achat. Combien de t-shirts l'association doit-elle vendre pour que son profit brut soit d'au moins 24 000$?

B. Corrigé des problèmes

1. Le moment que Caroline passe dans le tunnel correspond à l'inéquation :

$$4 \leq -2\sqrt{x} + 10 \leq 6$$

$$4 - 10 \leq -2\sqrt{x} \leq 6 - 10$$

$$\frac{-6}{-2} \geq \sqrt{x} \geq \frac{-4}{-2}$$

$$2 \leq \sqrt{x} \leq 3$$

$$2^2 \leq \left(\sqrt{x}\right)^2 \leq 3^2$$

$$4 \leq x \leq 9$$

Réponse : Caroline entre dans le tunnel à la 4^e seconde et elle en sort à la neuvième. Elle passe donc 5 secondes dans le tunnel.

2. Équation de la fonction t

   $t(x) = 0{,}5|x - 8| - 5$

   Calcul du temps cherché

   $0{,}5|x - 8| - 5 \leq -3$

   d'où $x \geq 4$ et $x \leq 12$

   donc la durée est $12 - 4 = 8$

   Réponse Le temps pendant lequel la température est inférieure ou égale à -3 °C est donc de 8 heures.

3. Hauteur = $-10x^2 + 60x$ h = hauteur

   Hauteur > 80 m x = temps en secondes

$$\begin{aligned} -10x^2 + 60x &> 80 \\ -10x^2 + 60x - 80 &> 0 \\ x^2 - 6x + 8 &< 0 \\ (x - 4)(x - 2) &< 0 \end{aligned}$$

$-\infty, 2[$	2	$]2, 4[$	4	$]4, \infty$
-	0	+	0	-

Réponse

Réponse : Le projectile se trouvera à une hauteur supérieure à 80 mètres entre la 2e et la 4e seconde.

4.

$5\sqrt{9a-3150}-100>100$ $5\sqrt{9a-3150}>200$ $\sqrt{9a-3150}>40$ $\left(\sqrt{9a-3150}\right)^2>1600$ $9a-3150>1600$ $9a>1600+3150$ $a>\frac{4750}{9}$ $a>527{,}77$ $a>528$	Restriction : $9a>3150$ $a>350$

Réponse : Au moins 578 albums

5.

Valeur = $\frac{-1}{4}t^2+2t+2$

Valeur > 5

$\frac{-1}{4}t^2+2t+2>5$

$\frac{-1}{4}t^2+2t+2-5>0$

$\frac{-1t^2+8t-12}{4}>\frac{0}{4}$

$-t^2+8t-12>0$

$(-t+6)(t-2)>0$

$-\infty$, 2[	2	]2 , 6[	6	]6 , ∞
-	0	+	0	-

Réponse

Réponse : L'action a eu une valeur supérieure à 5$ pendant 4 mois.

6.

Profit = $3|x-20|+36$

Profit > 24 000$

$3|x-20|+36>24\,000$

$3|x-20|>23\,964$

$|x-20|>79\,88$

$x>8008 \quad \text{ou} \quad x<-7968 \longrightarrow$ à rejeter

Réponse : L'association devra vendre au moins 8 008 t-shirts.