L'ESCALE
CENTRE D'ÉDUCATION DES ADULTES

COMMISSION SCOLAIRE DE L'AMIANTE
Un partenaire à la réussite !

DOCUMENT DE RÉVISION MAT-4109

ÉLABORÉ PAR RICHARD ROUSSEAU, ENSEIGNANT EN MATHÉMATIQUES,
CENTRE D'ÉDUCATION DES ADULTES L'ESCALE

COMMISSION SCOLAIRE DE L'AMIANTE

MAI 2005

Mathématiques – Ensembles, relations et fonctions

MAT-4109-1

Partie 1

Intervalles de nombres réels

Rappel :

Les intervalles sont définis comme des ensembles de nombres réels qui sont solutions d'une inéquation.

Par exemples :

$x \geq 2$ a comme solution tous les nombres réels plus grands ou égaux à 2,
$x \leq 2$ a comme solution tous les nombres réels plus petits ou égaux à 2,
$x > 2$ a comme solution tous les nombres réels plus grands que 2,
$x < 2$ a comme solution tous les nombres réels plus petits que 2.

Autres exemples :

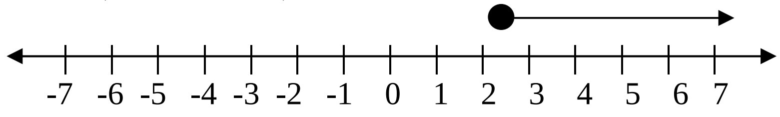
$2 \leq x \leq 5$ a comme solution tous les nombres réels compris entre 2 inclus et 5 inclus,
$2 \leq x < 5$ a comme solution tous les nombres réels compris entre 2 inclus et 5 exclu,
$2 < x \leq 5$ a comme solution tous les nombres réels compris entre 2 exclu et 5 inclus,
$2 < x < 5$ a comme solution tous les nombres réels compris entre 2 exclu et 5 exclu.

Représentation graphique des intervalles sur une droite numérique

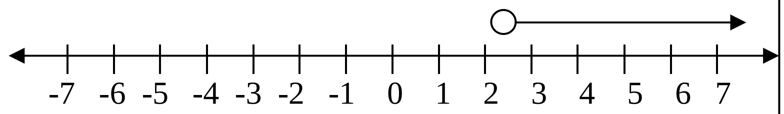
On représente la solution sur une droite numérique par une droite qui peut être bornée à ces extrémités soit par un point noir si le nombre est inclus ou par un point blanc si le nombre est exclu.

Regarde bien les exemples suivants :

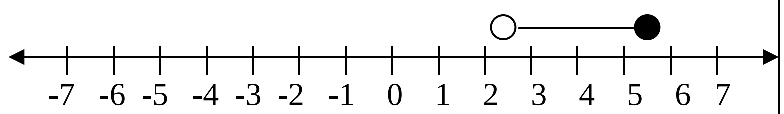
$x \geq 2$ (le 2 est inclus)



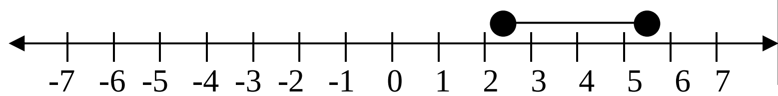
$x > 2$ (le 2 est exclu)



$2 < x \leq 5$ (le 2 est exclu et le 5 est inclus)



$2 \leq x \leq 5$ (le 2 et le 5 sont inclus)



Note

Étant donné la moins bonne précision du logiciel utilisé, veuillez considérer que tous les points sont alignés exactement sur les entiers situés en dessous d'eux.

Description des intervalles de nombres réels en compréhension.

Regarde bien les exemples suivants :

L'intervalle $\mathbf{2 \leq x \leq 5}$ est représenté en compréhension de la manière suivante :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$$

L'intervalle $\mathbf{2 < x \leq 5}$ est représenté en compréhension de la manière suivante :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$$

L'intervalle $\mathbf{2 < x < 5}$ est représenté en compréhension de la manière suivante :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$$

L'intervalle $\mathbf{x < 2}$ est représenté en compréhension de la manière suivante :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

Notation symbolique d’intervalles :

La notation symbolique se fait avec des crochets fermés si le nombre est inclus et ouvert si le nombre est exclu.

Regarde bien les exemples suivants :

L’intervalle $\mathbf{2 \leq x \leq 5}$ est représenté symboliquement par [2, 5]

L’intervalle $\mathbf{2 < x \leq 5}$ est représenté symboliquement par]2, 5]

L’intervalle $\mathbf{2 < x < 5}$ est représenté symboliquement par]2, 5[

L’intervalle $\mathbf{x > 5}$ est représenté symboliquement par]5, ∞

L’intervalle $\mathbf{x < 5}$ est représenté symboliquement par -∞, 5[

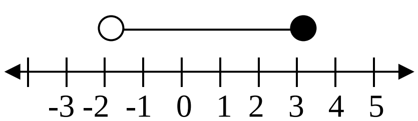
L’intervalle $\mathbf{x \leq 5}$ est représenté symboliquement par -∞, 5]

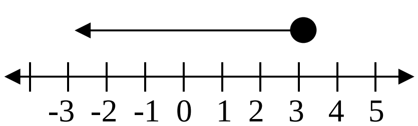
En résumé, il y a trois façons de représenter un intervalle de nombres réels.

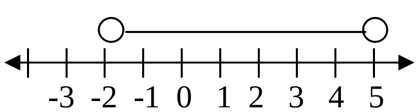
- La droite numérique
- En compréhension
- Notation symbolique

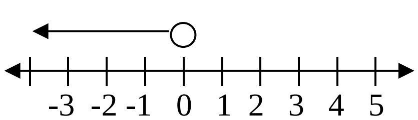
Quelques petits exercices :

Décrire en compréhension chacun des intervalles représentés et donner sa notation symbolique.

a) 

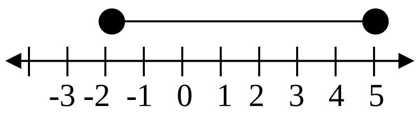
b) 

c) 

d) 

<u>Note</u>

Étant donné la précision du logiciel utilisé, veuillez considérer que tous les points sont alignés exactement sur les entiers situés en dessous d’eux.

e) 

Décrire en compréhension chacun des intervalles donnés et le représenter sur une droite numérique.

a) [-2, 1]

b)]-3, ∞

c) -∞, -1]

d)]-3, 4]

e) [$\frac{5}{2}$, 4]

Faire corriger l’exercice par ton formateur.

Opérations ensemblistes

Tout comme on fait les opérations +, –, x et ÷ sur les nombres, il y a des opérations que l’on peut effectuer sur les ensembles de nombres réels. Ces opérations sont l’intersection, l’union, la différence et le complément. Les symboles de ces opérations sont les suivants :

- intersection : $\bigcap$
- union : $\bigcup$
- différence : \
- complément : '

L’intersection $\bigcap$:

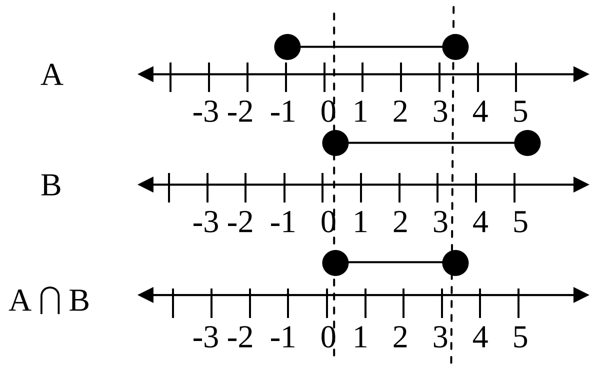
L’intersection de deux intervalles A et B se note A $\bigcap$ B. On dit alors **A intersection B** et la réponse est constituée des éléments qui sont situés à la fois dans le premier et dans le second intervalle. En clair, c’est la partie commune aux deux intervalles.

$$A \bigcap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(le symbole $\wedge$ veut dire et)

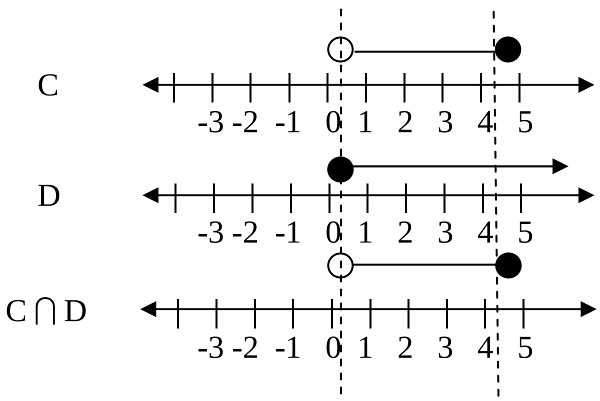
Regarde bien les exemples suivants :

Soit A = [-1, 3] et B = [0, 5], effectuer A ⋂ B

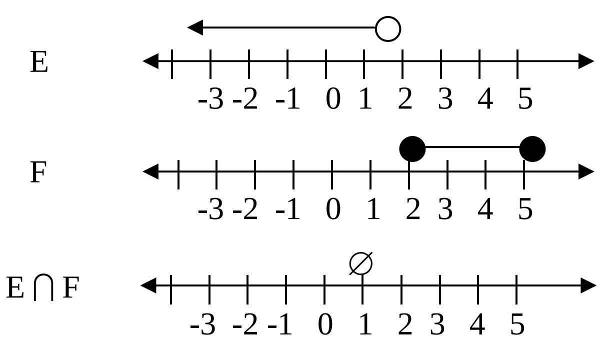


Soit C =]0, 4] et D = [0, ∞, effectuer C ⋂ D

Étant donné la précision du logiciel utilisé, veuillez considérer que tous les points sont alignés exactement sur les entiers situés en dessous d’eux.



Soit E = – ∞, 1[et F = [2, 5], effectuer E ⋂ F



Réponse s’écrit ∅, c’est l’ensemble vide

L'union ⋃

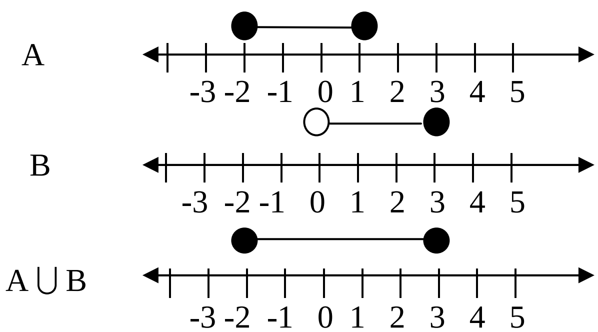
L'union de deux intervalles A et B se note A ⋃ B. On dit alors **A union B** et la réponse est constituée des éléments des deux intervalles.

$$A \bigcup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \vee x \in B\}$$

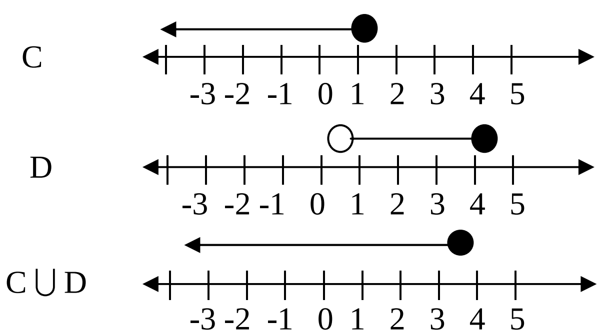
(le symbole $\vee$ veut dire ou)

Regarde bien les exemples suivants :

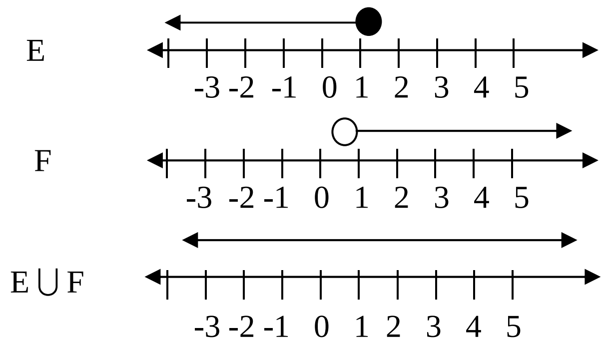
Soit A = [– 2, 1] et B =]0, 3], effectuer A ⋃ B



Soit C = – ∞, 1] et D =]0, 4], effectuer C ⋃ D



Soit E = $-\infty$, 1] et D =]0, ∞, effectuer E $\cup$ F



S’écrit aussi $\mathbb{R}$, ce sont les réels.

<u>La différence</u> \

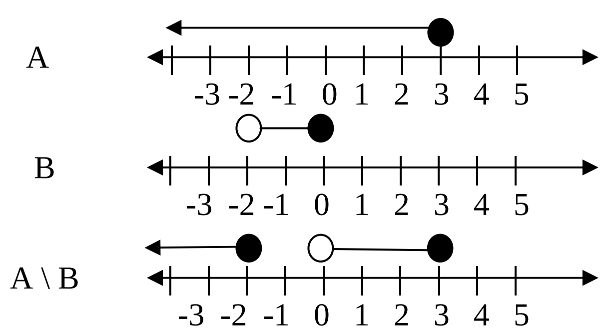
La différence de deux intervalles A et B se note A \ B. On dit alors **A différent B** et la réponse est constituée de l’ensemble des éléments du premier intervalle qui n’appartiennent pas au second.

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

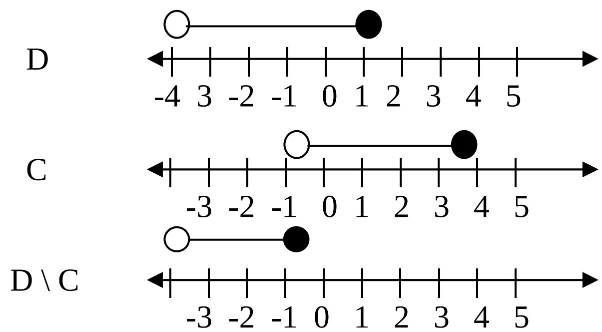
(le symbole $\wedge$ veut dire et)

Regarde bien les exemples suivants :

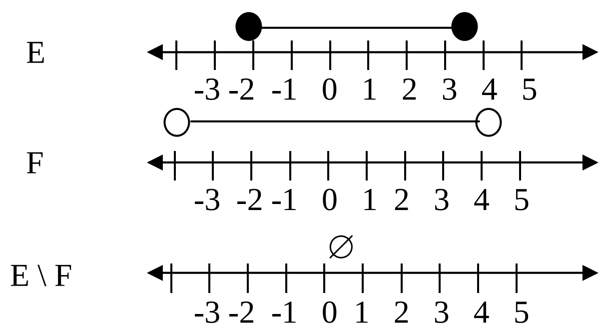
Soit A = $-\infty$, 3] et]$-$ 2, 0], effectuer A \ B



Soit C =]–1, 3] et D =]–4, 1], effectuer D \ C



Soit E = [–2, 3] et F =]–4, 4[, effectuer E \ F



Réponse s'écrit ∅, c'est l'ensemble vide

Le complément '

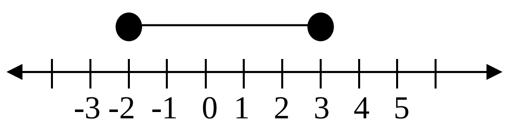
Le complément d'un intervalle A se note A'. On dit alors **complément de A** et la réponse est constituée de l'ensemble de tous les nombres réels qui n'appartiennent pas à cet intervalle.

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$$

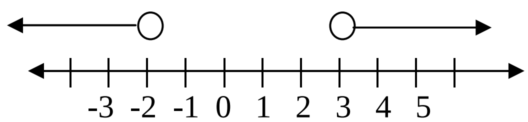
Exemples :

Soit A = [–2, 3], effectuer A'

A

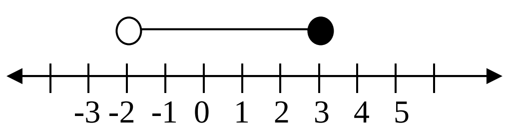


A '

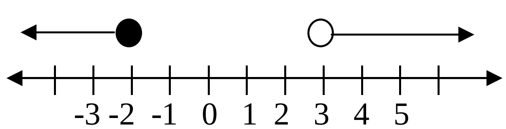


Soit B =]–2, 3], effectuer B'

B

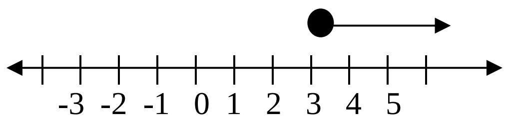


B '

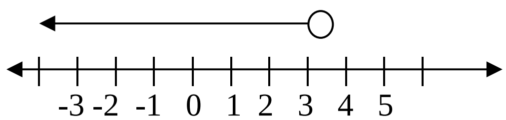


Soit C = [3, ∞, effectuer C'

C



C'



Voici un résumé de ce qui arrive aux extrémités des intervalles lors d’opérations ensemblistes :

○ ∩ ○ = ○	○ ∪ ○ = ○	○ \ ○ = ○	○' = ●
● ∩ ○ = ○	● ∪ ○ = ●	● \ ○ = ●	●' = ○
○ ∩ ● = ○	○ ∪ ● = ●	○ \ ● = ○	
● ∩ ● = ●	● ∪ ● = ●	● \ ● = ○	

Maintenant que tu sais ce que sont les opérations ensemblistes, fais les exercices suivants à l’aide de droites numériques.

1) A ∩ B si A =]0, 4] et B =]2, 5[
2) C ∪ D si C = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$ et D = $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$
3) E \ F si E = $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ et F = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
4) G' si G = [0, 5]
5) H \ I si H = – ∞, 5[et I =]0, 2[
6) T ∩ U si T = [$-\frac{3}{2}$, 2] et U =] $\frac{1}{2}$, ∞

Faire corriger les exercices par ton formateur.

Suites d’opérations ensemblistes appliquées à des intervalles

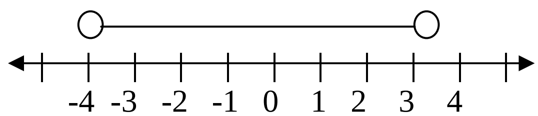
Tout comme il existe des priorités d’opérations dans les opérations arithmétiques, il existe une loi de priorité pour les opérations ensemblistes.

- Faire d’abord les opérations situées entre parenthèses ;
- Faire l’opération complément avant les autres opérations qui sont l’intersection, l’union et la différence.

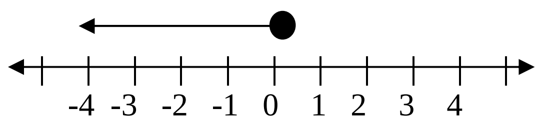
Regarde bien les exemples suivants :

Exprimer à l’aide de la notation symbolique le résultat des opérations suivantes :
A \ (B ⋂ C) si A =]– 4, 3[, B = –∞, 0] et C =]–3, 2[

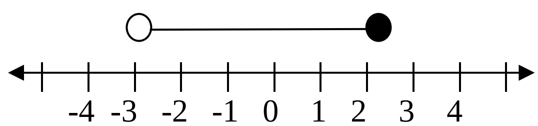
A



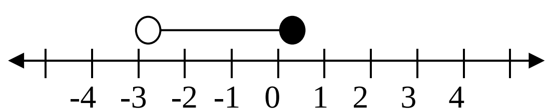
B



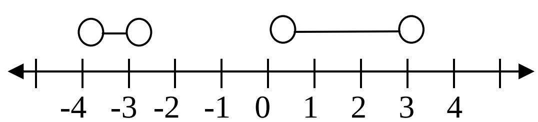
C



(B ⋂ C)



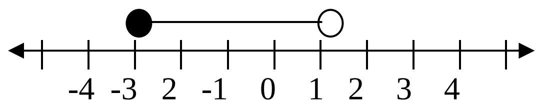
A \ (B ⋂ C)



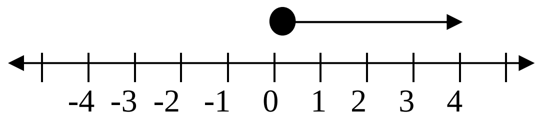
La réponse notée symboliquement est :]–4, –3[⋃]0, 3[

Exprimer à l’aide de la notation symbolique le résultat des opérations suivantes :
C' ⋂ D si C = [– 3, 1[et D = [0, ∞

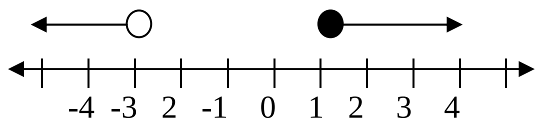
C



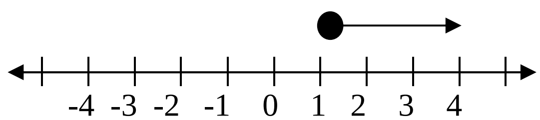
D



C'



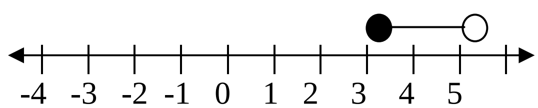
C' ⋂ D



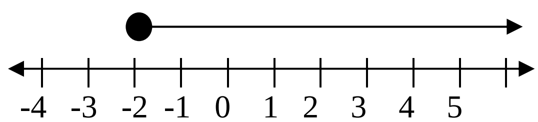
La réponse notée symboliquement est : [1,∞

Exprimer à l’aide de la notation symbolique le résultat des opérations suivantes :
(E ⋂ F) \ G si E = [3, 5[, F =]–2, ∞ et G =]–1, 4]

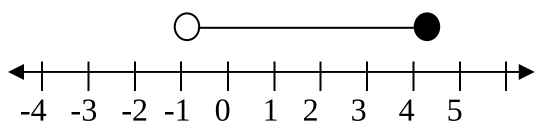
E



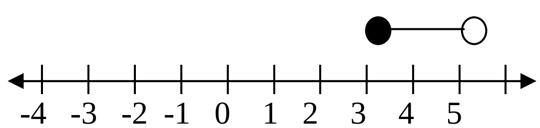
F

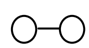


G



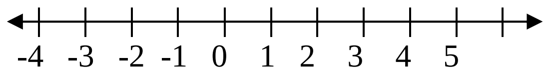
(E ⋂ F)





La réponse notée symboliquement est]4, 5[

$(E \cap F) \setminus G$



Exercices :

Effectuer les opérations demandées et donner la réponse sous forme d’intervalle.

$A \setminus (B \cup C)'$ si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$

$D \cap (E \setminus F)'$ si $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0\}$

$(G' \cap H) \cup I$ si $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$

Effectuer les opérations demandées et donner la réponse en compréhension.

$A \cup B \cup C$ si A = -∞, 0[, B =]-3, 1] et C = [-2, 4]

$D \cap E \cap F$ si D = [-2, 5], E =]-1, 4] et F = [0, ∞

$(G \cup H)'$ si G = -∞, 3[et H =]3, ∞

$(I \setminus J) \cup K$ si I = [2, 5], J = [3, 6] et K = [3, ∞

Faire corriger les exercices par ton formateur.

Mathématiques – Ensembles, relations et fonctions

MAT-4109-1

Partie 2

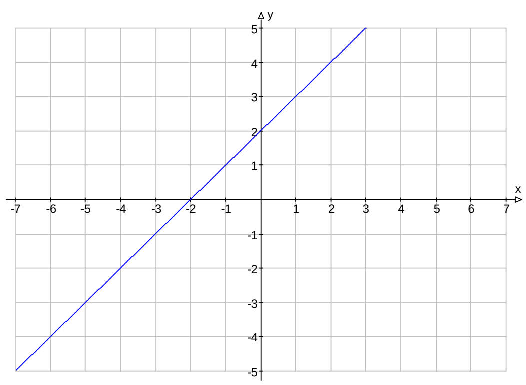
Définir en compréhension une fonction définie graphiquement dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Fonction du premier degré de la forme y = mx + b

Les fonctions de la forme y = mx + b sont toujours représentées dans un graphique par une droite et dans un cours antérieur, tu es devenu capable de trouver une équation à l'aide de sa pente et un point. Ici nous ferons la même chose à partir d'un graphique et nous donnerons la réponse en compréhension.

Exemple :

Définir en compréhension la fonction T représentée ci-dessous



Étapes pour trouver l'équation :

À l'aide de deux points de la droite, on calcule la pente **m** en utilisant la formule

$$\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ensuite, on détermine l'équation en appliquant la formule $\mathbf{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}}$ et finalement, on isole le y après avoir fait le produit croisé.

Trouvons l'équation en prenant les coordonnées (2, 4) et (-2, 0).

Calculons la pente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{-2 - 2} = \frac{-4}{-4} = 1$ donc m = 1.

Appliquons la formule $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$; $\frac{1}{1} = \frac{y-4}{x-2}$; 1(y-4) = 1(x-2); y-4 = x-2 et y = x +2.

Écrivons la réponse en compréhension : T = {(x, y) ∈ ℝ x ℝ | y = x + 2}

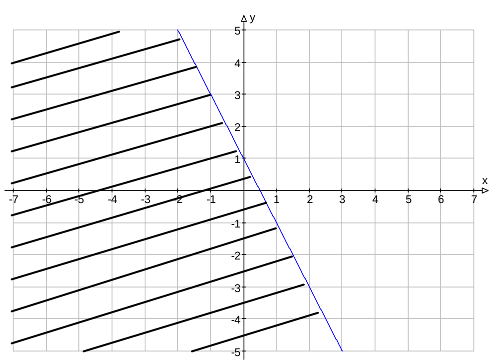
Note : ℝ x ℝ est le domaine et l'image de la relation.

Fonctions du premier degré de la forme y ≤ mx + b ou y ≥ mx + b
(Tu as déjà vu antérieurement ce qu'est une inéquation)

Une fonction du premier degré de la forme y ≤ mx + b ou y ≥ mx + b est toujours représentée par une droite (pleine ou pointillée) et avec un ensemble de points situés au-dessus ou en dessous de la droite. Les étapes restent les mêmes mais il faudra déterminer le sens du symbole de l'inégalité qui correspondra à la région où sont situés ces points (ou la région hachurée).

Exemple :

Définir en compréhension la fonction S représentée graphiquement ci-dessous :



Soit les coordonnées (0,1) et (-2,5)

Calculons la pente $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-1}{-2-0} = \frac{4}{-2}$

Donc $m = \frac{-2}{1}$

Appliquons la formule $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$; $\frac{-2}{1} = \frac{y-1}{x-0}$; 1(y-1) = -2(x-0) ; y – 1 = -2x et y = -2x + 1

Comme nous connaissons l'équation de la droite, il nous reste à déterminer le sens du signe de l'inégalité. Comment ? Il suffit de choisir au hasard un point (x, y) <u>situé dans la région hachurée et qui n'est pas sur la droite.</u> Comme la droite est pleine, ce sera ≤ ou ≥.

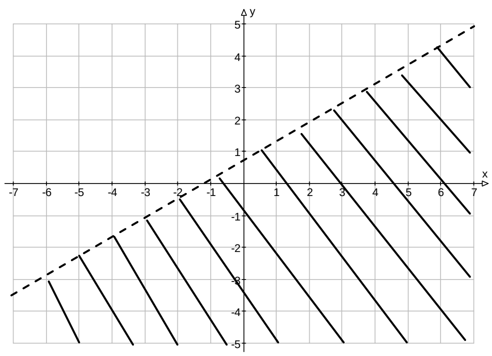
Prenons la coordonnée (-2, 0) et remplaçons le x et le y de notre équation par ces valeurs.

Alors, nous avions y = -2x +1 donc : y ? -2x + 1
0 ? –2 (-2) + 1
0 ? 5
0 ≤ 5

Notre réponse finale est donc : S = {(x, y) ∈ ℝ x ℝ | y ≤ -2x +1}

Autre exemple :

Définir en compréhension la fonction W représentée graphiquement ci-dessous :



Soit les coordonnées (2, 2) et (7, 5)

Calculons la pente $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-2}{7-2} = \frac{3}{5}$

Donc $m = \frac{3}{5}$

Appliquons la formule $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$; $\frac{3}{5} = \frac{y-2}{x-2}$; 5(y-2) = 3(x-2); 5y – 10 = 3x – 6 et $y = \frac{3x+4}{5}$

Trouvons maintenant le sens du symbole de l'inéquation et ce sera < ou > car la droite est en pointillée.

Prenons la coordonnée (3, 1) qui fait partie de la région hachurée et remplaçons le x et le y de notre équation par ces valeurs.

Alors, nous avions $y = \frac{3x+4}{5}$ donc : $1 \ ? \ \frac{3(3)+4}{5}$ et $1 < \frac{13}{5}$

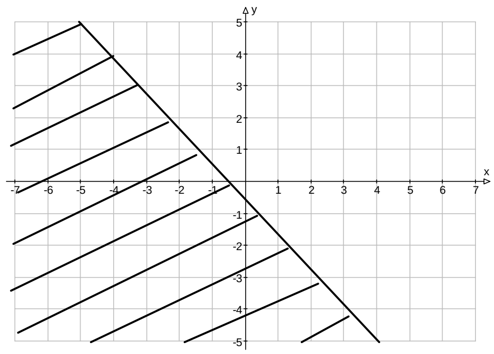
Notre réponse finale est donc : W = {(x, y) ∈ 3x3 | $y < \frac{3x+4}{5}$ }

Voici trois exercices que tu peux faire maintenant et fais-les corriger par ton formateur.

Soit les graphiques suivants, trouve l'inéquation associée à chacun d'eux.

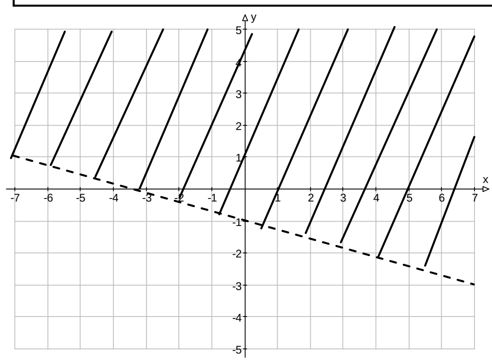
Soit le graphique de la fonction X

A)



Soit le graphique de la fonction Y

B)

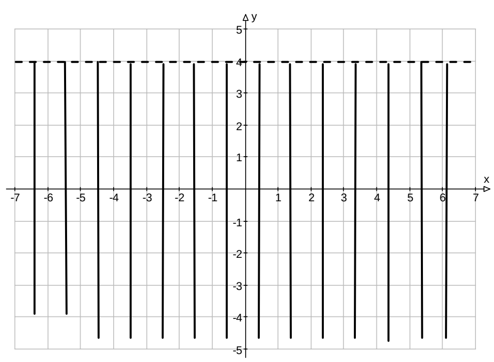


<u>Étapes :</u>

1) Trouve la pente…
2) Trouve l'équation…
3) Détermine les sens de l'inégalité…
4) Écris ta réponse en compréhension.

Soit le graphique de la fonction Z

C)



Tu dois faire le contraire aussi…

Représenter graphiquement une inéquation et donner son domaine et son image.

Exemples :

Soit R = $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{-y}{2} + 1 \geq \frac{x}{3}\}$

Oh! L'inéquation $\frac{-y}{2} + 1 \geq \frac{x}{3}$ semble compliquée!

Comme il y a des fractions, nous allons faire un dénominateur commun.

$\frac{-y}{2} + \frac{1}{1} \geq \frac{x}{3}$ et $\frac{-3y}{6} + \frac{6}{6} \geq \frac{2x}{6}$ donc, l'inéquation devient $-3y + 6 \geq 2x$.

Maintenant isolons le y :

$-3y + 6 \geq 2x$;

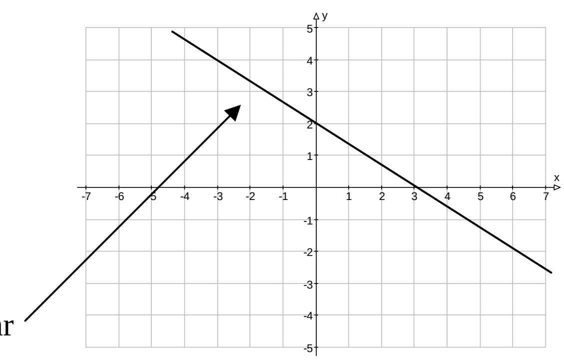
$-3y \geq 2x - 6$

$3y \leq -2x + 6$ (ici, les signes ont changé afin de rendre le coefficient y positif)

$y \leq \frac{-2x}{3} + 2$

Trouvons maintenant des couples :

Si x vaut 0 alors y vaut 2   (0,2)
Si x vaut 3 alors y vaut 0   (3,0)
Si x vaut –3 alors y vaut 4   (-3, 4)



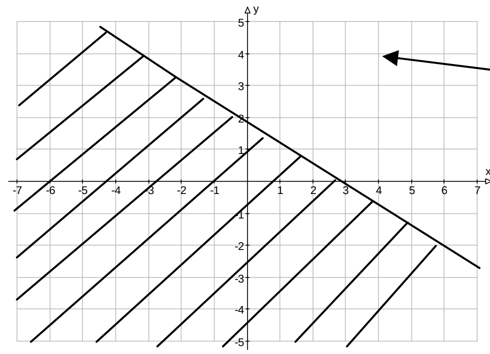
Traçons la droite en trait continue car nous avons le symbole ≤

Il reste à déterminer quelle région il faut hachurer.

Suite sur l'autre page…

Prenons un point quelconque qui n'est pas situé sur la droite…prenons (4,4) et remplaçons les variables x et y afin de déterminer si l'inéquation sera vraie ou fausse.

$\mathbf{y \le \frac{-2x}{3} + 2}$; $4 \le \frac{-2(4)}{3} + 2$; $\mathbf{4 \le -\frac{8}{3} + 2}$ et $4 \le -\frac{2}{3}$ ce qui est faux donc, la région hachurée sera celle qui **ne contient pas** la coordonnée (4, 4).



La coordonnée (4, 4) est ici et elle ne fait pas partie de la région que l'on doit hachurer.

Le domaine de notre fonction représentée graphiquement est 3
L'image de notre fonction représentée graphiquement est 3

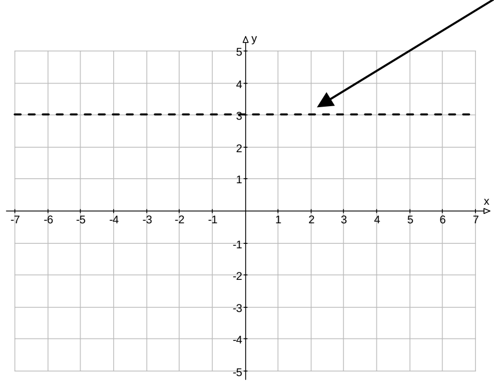
Soit S = $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{y}{3} > 1\}$

Isolons le y :

$\frac{y}{3} > 1$ et $y > 3$

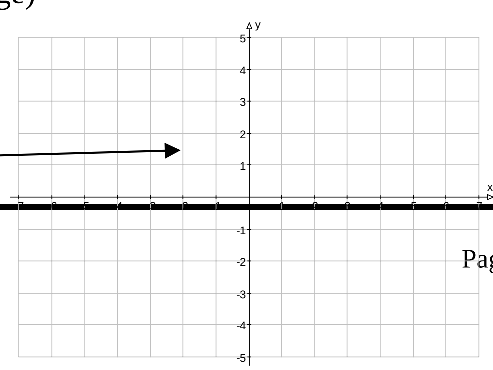
Comme il n'y a pas de x, nous avons une droite de pente nulle qui passe par l'ordonnée 3.

Les couples seront : (0, 3), (1, 3) et (2,3) et traçons la droite en pointillée car nous avons le symbole >.



Maintenant, où hachurer ? (suite sur l'autre page)

Nous avons y > 3.

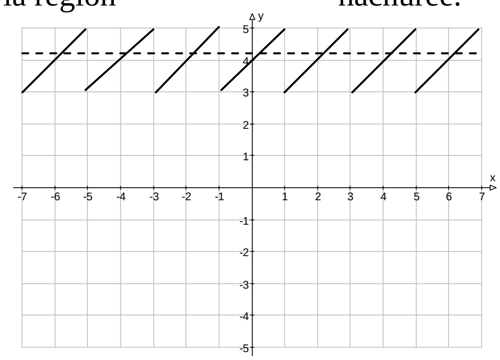


Prenons la coordonnée (-2, 4) qui ne fait pas partie de la droite et remplaçons les variables (dans notre cas, il n’y a que le y).

$y > 3$
$4 > 3$

C’est vrai, donc le point (-2, 4) fait partie de la la région hachurée.

Le graphique est donc celui-ci →
Son domaine est 3 et son image est]3, ∞



<u>Petit truc</u> : Pour savoir quelle région hachurée, il suffit de regarder le signe de l’inégalité **<u>quand</u>** le y est isolé correctement.

Si le signe est ≤ ou < alors la région à hachurer sera située en dessous de la droite.

Si le signe est ≥ ou > alors la région à hachurer sera située au-dessus de la droite.

À ton tour maintenant. Fais les trois exercices suivants et demande à ton formateur de corriger.

Représente sur un plan cartésien et donne le domaine et l’image des fonctions suivantes.

1) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > 1 - 2x\}$

2) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2 \leq 2x + 1\}$

3) $I = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -3y + \frac{1}{2} \geq 0\}$

- Isole le y si nécessaire (fais attention aux changements de signes qui peuvent survenir).
- Trouve des couples.
- Trace la droite en trait plein ou pointillé.
- Détermine la région à hachurer.
- Détermine le domaine et l’image.

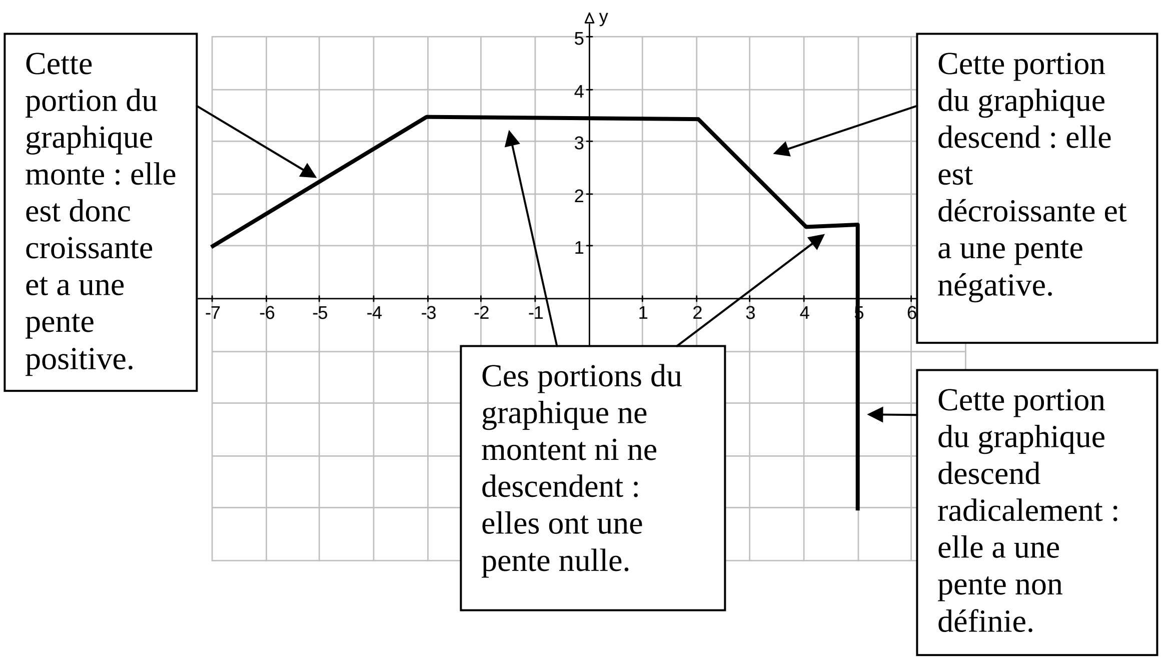
<u>Lecture de graphiques et détermination des ses caractéristiques.</u>

Tout comme en français, nous lisons un texte de gauche à droite, il en va de la même façon quand nous lisons un graphique. La lecture d'un graphique se fait de gauche à droite.

Étudions ou lisons un peu les graphiques suivants :

De gauche à droite

<u>Croissance et décroissance</u>

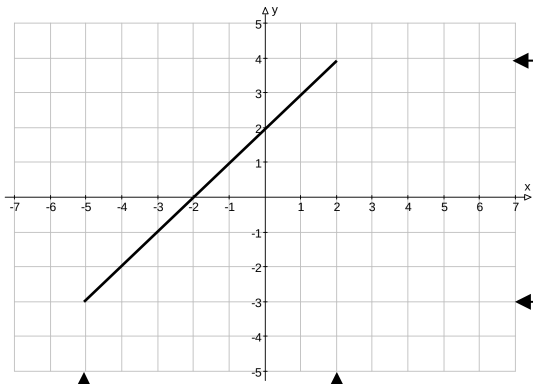


Dans l'intervalle [-7, -3] le graphique est croissant ou a une pente positive ;
Dans l'intervalle [-3, 2] le graphique a une pente nulle ;
Dans l'intervalle [2, 4] le graphique est descendant ou a une pente négative ;
Dans l'intervalle [4, 5] le graphique a une pente nulle.

Alors, sur ce graphique, nous avons vu ce qu'est une portion croissante donc une pente positive, une portion décroissante donc une pente négative, une portion qui ne monte et ne descend donc une pente nulle et finalement une portion qui descend radicalement donc une pente de nature non définie.

<u>Domaine et image</u>

Étant donnée la portion de droite suivante :



L’**image** est la valeur des y que peut prendre la droite et dans notre exemple, notre droite est tracée du y qui vaut –3 jusqu’au y qui vaut 4. C’est un peu comme la hauteur que peut prendre le graphique.

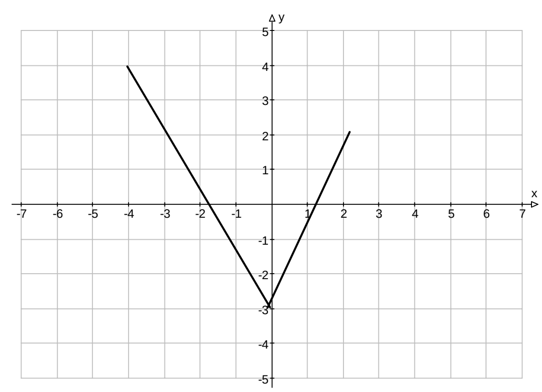
On la représente comme suit :
Ima = [-3, 4]

Le <u>**domaine**</u> est la valeur des x que peut prendre la droite et dans notre exemple, notre droite est tracée du x qui vaut –5 jusqu’au x qui vaut 2. C’est un peu comme la largeur que peu prendre la droite.
On le représente comme suit :
<u>Dom = [-5,2]</u>

Note : lorsque la droite n’est pas une section de droite, c’est à dire qu’elle se continue à l’infinie, alors le domaine et l’image seront les **réels** alors on écrit :
Dom = 3 et Ima = 3

Autre exemple :

Ici, le domaine de ce graphique est de –4 jusqu’à 2 donc
Dom = [-4, 2] et son image est de –3 jusqu’au 4 donc
Ima = [-3, 4]



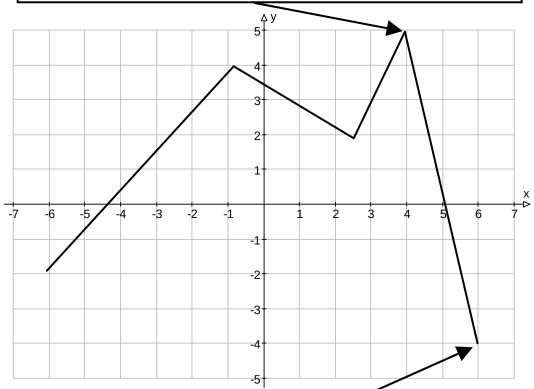
<u>Maximum et minimum</u>

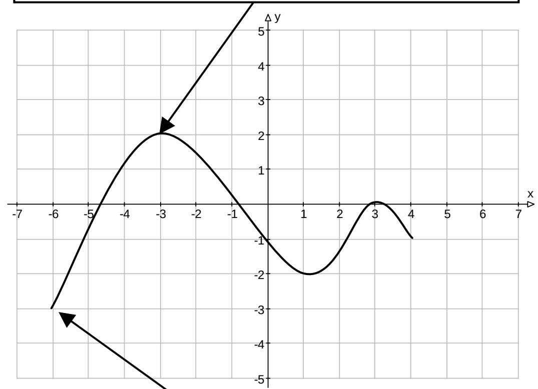
Regarde bien les exemples suivants :

Le maximum est vraiment la hauteur maximale prise par le graphique.

La maximum de ce graphique est 5 et il est situé au x qui vaut 4.

La maximum de ce graphique est 2 et il est situé au x qui vaut –3.





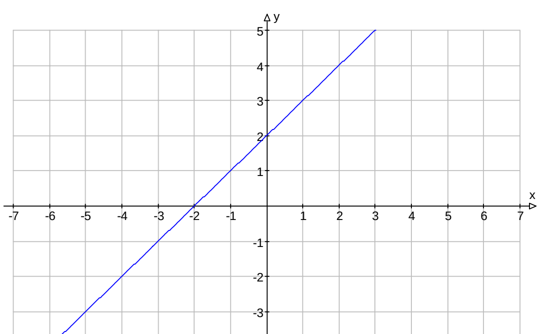
Le minimum de ce graphique est –4 et il est situé au x qui vaut 6.

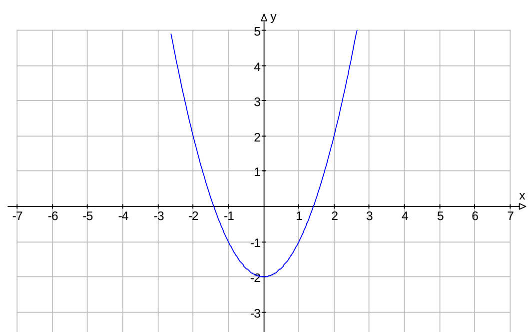
Le minimum de ce graphique est –3 et il est situé au x qui vaut –6.

Un autre exemple :

Soit T = {(x, y) ∈ ℝ x ℝ | y = x + 2}

Soit U = {(x, y) ∈ ℝ x ℝ | y = x^2 – 2}



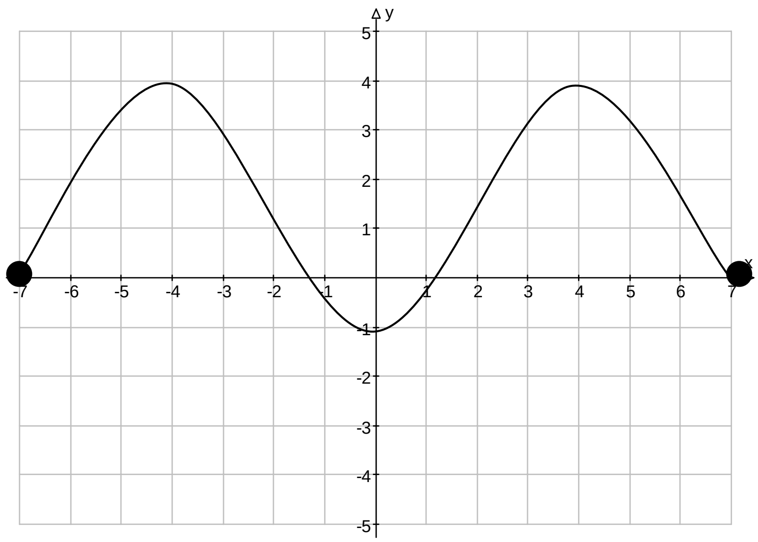


Ici, il n'y a pas de maximum et de minimum car le graphique est tracé dans ℝ x ℝ et la droite monte et descend à l'infinie.

Ici, il n'y a pas de maximum mais il y a un minimum qui est –2. Le graphique est tracé dans ℝ x ℝ et la parabole monte à l'infinie et elle descend jusqu'à -2.

Et un dernier :

Soit la représentation graphique suivante, nous déterminerons quelques caractéristiques de cette fonction.



Le domaine est [-7, 7] et l'image est [-1, 4] ;
Les intervalles où la fonction est croissante sont [-7, -4] et [0, 7] ;
Les intervalles où la fonction est décroissante sont [-4, 0] et [4, 7] ;
Le maximum est 4 et le minimum est –1.

Ce document n'est qu'une révision *sélective* de la matière contenue dans le cours MAT- 4109 et ne doit pas être utilisée pour fin de préparation à une évaluation.