L'ESCALE
CENTRE D'ÉDUCATION DES ADULTES

COMMISSION SCOLAIRE DE L'AMIANTE
Un partenaire à la réussite !

DOCUMENT DE RÉVISION MAT-4101

ÉLABORÉ PAR JEAN PAQUET, ENSEIGNANT EN MATHÉMATIQUES,
CENTRE D'ÉDUCATION DES ADULTES L'ESCALE

COMMISSION SCOLAIRE DE L'AMIANTE

MAI 2005

DOCUMENT DE RÉVISION DU COURS MAT - 4101

Il y a trois méthodes, dites algébriques, pour trouver le couple-solution (x,y) d'un système d'équations et il y a la méthode graphique. Dans les cas qui nous préoccupe, il y aura toujours deux équations, c'est pour cela qu'on parle d'un système d'équations. On verra plus loin qu'il y a deux exceptions : lorsque les droites sont parallèles et lorsqu'elles sont confondues. Les 3 méthodes équivalentes sont : **<u>élimination</u>, <u>substitution</u> et <u>comparaison.</u>**

A. La méthode d'**<u>élimination</u>**, comme son nom l'indique, a pour but d'**<u>éliminer</u>** une des 2 variables. Il s'agit de faire l'**<u>addition</u>** des deux équations.

   Ex : 1 $2x = 5y - 6$ et 2 $-4y = 5 - 3x$

   1. On doit placer les variables l'une vis-à-vis l'autre, à gauche du signe égal, et le terme constant à droite pour les deux équations.

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -6 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

   2. On choisit la variable que l'on veut éliminer. Dans l'exemple, choisissons la variable y. On doit faire l'**<u>addition</u>** des deux équations. Dans notre cas, les variables ne pourront pas s'éliminer car elles ne sont pas de signes contraires et n'ont pas le même coefficient. Il faut alors **<u>multiplier</u>** l'une, ou les deux équations, afin d'avoir des signes contraires et le même coefficient.

$2x - 5y = -6$ on multiplie l'équation 1 par (-4) car on doit avoir des signes contraires.

\+

$3x - 4y = 5$ on multiplie l'équation 2 par (5).

Petit truc : Pour trouver « le » coefficient, vous n'avez qu'à multiplier par les coefficients opposés des variables à éliminer.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} -8x + \cancel{20y} &= 24 \\ +\quad 15x - \cancel{20y} &= 25 \\ \hline 7x &= 49 \\ x &= 49/7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

les variables y vont s'éliminer car $20y + (-20y) = 0$

$x = 7$ c'est la valeur de la 1re variable de notre couple solution.

3. Maintenant qu'on a trouvé la valeur d'une variable, on remplace cette variable dans l'une ou l'autre des équations de départ par la valeur obtenue. On isole la variable restante. On ne refait pas tout le processus car c'est déjà long une fois, alors on remplace tout simplement.

$2x = 5y - 6$ On remplace la variable x par 7 et on isole la variable y.

$$
\begin{aligned}
2(7) &= 5y - 6 \\
14 &= 5y - 6 \\
-5y &= -6 - 14 \\
-5y &= -20 \\
y &= -20/-5 \\
y &= 4
\end{aligned}
$$

4. On obtient alors le couple-solution (x , y). Les deux équations vont se croiser en ce point.

Dans notre cas, on a (7 , 4) qui est le couple solution du système d'équation.

B. La méthode de <u>**substitution**</u> consiste à isoler une variable dans une équation et de remplacer (substituer) cette variable dans la seconde équation pour ne travailler qu'une variable et non 2 comme la méthode d'élimination.

Ex : 1 $3x - 4y = -7$ et 2 $-4y + 5 = 2x - 3$

1. On choisit l'équation et la variable à isoler. Prenons l'équation 1 et, cette fois-ci, isolons la variable x.

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= -7 \\
3x &= 4y - 7 \\
x &= \frac{4}{3}y - \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

2. Dans l'équation 2, on substitue la variable x par la réponse trouvée en 1 et on isole la variable restante en respectant la priorité des opérations de l'algèbre.

$-4y + 5 = 2x - 3$ on fait la substitution de x par $\left(\frac{4}{3}y - \frac{7}{3}\right)$

$-4y + 5 = 2(\frac{4}{3}\ y - \frac{7}{3}) - 3$ on fait la distributivité de 2 par $(\frac{4}{3}\ y - \frac{7}{3})$

$-4y + 5 = \frac{8}{3}y - \frac{14}{3} - 3$ on a des fractions, on peut faire un dénominateur commun ou transformer les fractions en décimales (à votre choix).

$-\frac{12}{3}y + \frac{15}{3} = \frac{8}{3}y - \frac{14}{3} - \frac{9}{3}$ on place les variables d'un côté et les termes constants de l'autre.

$-12y - 8y = -14 - 9 -15$ on sait qu'une fois le dénominateur trouvé, on peut l'éliminer.

$-20y = -38$

$y = \frac{-38}{-20}$

$y = \frac{19}{10}$ ou $y = 1,9$

3. Maintenant qu’on a trouvé la valeur d’une variable, on la remplace dans l’une ou l’autre des équations de départ par la valeur obtenue. On isole la variable restante. On ne refait pas tout le processus car c’est déjà long une fois, alors on remplace tout simplement.

$-4y + 5 = 2x - 3$ prenons l'équation 2

$-4(\frac{19}{10}) + 5 = 2x - 3$ remplaçons y par $\frac{19}{10}$

$-\frac{76}{10} + 5 = 2x - 3$ on a des fractions, on peut faire un dénominateur commun ou transformer les fractions en décimales (à votre choix).

$-\frac{76}{10} + \frac{50}{10} = \frac{20}{10}x - \frac{30}{10}$

$-76 + 50 = 20x - 30$

$-20x = -30 + 76 -50$

$-20x = -4$

$$x = \frac{-4}{-20}$$

$x = \frac{1}{5}$ ou $x = 0{,}2$

4. On obtient alors le couple solution (x , y). Les deux équations vont se croiser en ce point.

Dans notre cas, on a ($\frac{1}{5}$; $\frac{19}{10}$) qui est le couple solution du système d'équation.

N.B. Le couple peut être donné sous la forme décimale (0,2 ; 1,9)

C. La méthode de <u>**comparaison**</u> consiste à isoler la même variable dans les deux équations afin de pouvoir « comparer » les variables restantes.

Ex : 1 $3{,}2x - 4{,}3y = -7$ et 2 $1{,}4y + 5 = 2{,}4x - 3{,}5$

1. On choisit la variable à isoler, soit y dans les deux équations :

$$3{,}2x - 4{,}3y = -7$$
$$-4{,}3y = -3{,}2x - 7$$
$$y = \frac{-3{,}2}{-4{,}3}x - \frac{7}{-4{,}3}$$
$$y = 0{,}744x + 1{,}628$$

$$1{,}4y + 5 = 2{,}4x - 3{,}5$$
$$1{,}4y = 2{,}4x - 3{,}5 - 5$$
$$y = \frac{2{,}4}{1{,}4}x - \frac{8{,}5}{1{,}4}$$
$$y = 1{,}714x - 6{,}071$$

Si on a $y = 0{,}744x + 1{,}628$ et qu'on a que $y = 1{,}714x - 6{,}071$, alors on peut affirmer que $0{,}744x + 1{,}628 = 1{,}714x - 6{,}071$. Il nous reste alors qu'une seule variable et ça devient plus simple à résoudre.

2. $0{,}744x + 1{,}628 = 1{,}714x - 6{,}071$
   $0{,}744x - 1{,}714x = -6{,}071 - 1{,}628$
   $-0{,}970x = -7{,}699$
   $x = \frac{-7{,}699}{-0{,}970}$
   $x = 7{,}937$

3. Maintenant qu'on a trouvé la valeur d'une variable, on la remplace dans l'une ou l'autre des équations de départ par la valeur obtenue. On isole la variable

restante. On ne refait pas tout le processus car c'est déjà long une fois, alors on remplace tout simplement. On peut utiliser l'équation déjà isolée à l'étape 1.

$y = 0{,}744x + 1{,}628$
$y = 0{,}744\ (\ 7{,}937\ ) + 1{,}628$
$y = 5{,}905 + 1{,}628$
$y = 7{,}533$

4. On obtient alors le couple solution (x , y). Les deux équations vont se croiser en ce point.

Dans notre cas, on a (7,937 ; 7,533) qui est le couple solution du système d'équation.

Exercices

a) $4x - 5y = -9$
$3x - 2y = 2$

b) $5x - 8y + 14 = 0$
$4x + 3y - 17 = 0$

c) $x = -y$
$-y = x - 2$

d) $2x + 5y - 4 = 0$
$3x + 2y = -5$

e) $2(2h + 3) = 3k$
$4k = 3 + 5h$

f) $t = 3v - 2$
$v = 5t - 11$

g) $0{,}3x + 0{,}7y = 27$
$2(0{,}2x - 0{,}1y) = 2$

h) $x/2 + y/3 = 7/4$
$2x/3 + 2y/9 = 4/3$

D. La méthode **graphique** de résolution d'un système d'équation se fait en dressant un tableau de valeurs pour chaque équation. Le point de rencontre des deux droites sera le couple-solution que l'on cherche. Notons que la méthode graphique n'étant pas précise, elle sera utilisée seulement lorsqu'on vous demandera de la faire.

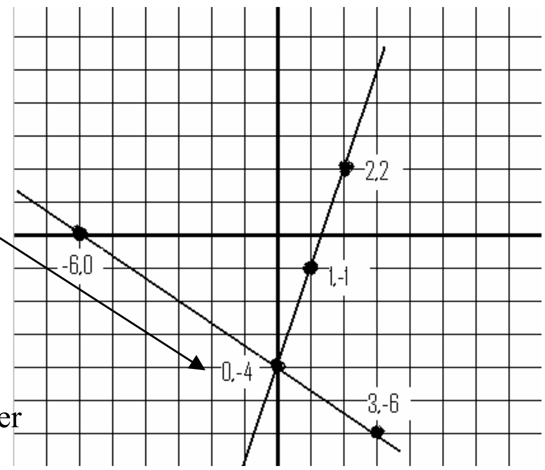
Soit le système suivant :

$y = 3x - 4$

x	y
0	-4
1	-1
2	2

$2x + 3y = -12$

x	y
0	-4
3	-6
-6	0

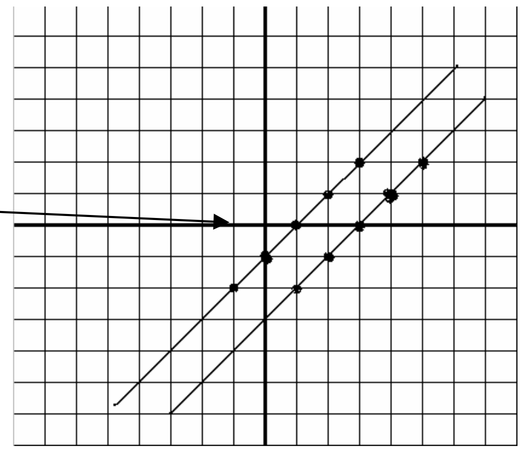


Le couple solution du système d'équation est le point commun de ces 2 tables de valeurs, soit le point (0 , -4). On peut aussi le constater sur le graphique.

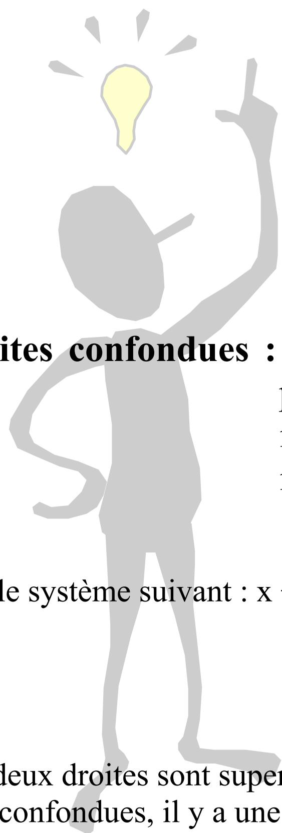
Deux cas particuliers : droites parallèles et droites confondues

Droites parallèles : si deux droites sont parallèles, elles ont la même pente et une ordonnée à l'origine différente; il n'y aura pas de point de rencontre; le système n'a pas de solution.

Soit le système suivant : $x - y = 1$ et $x = y + 2$

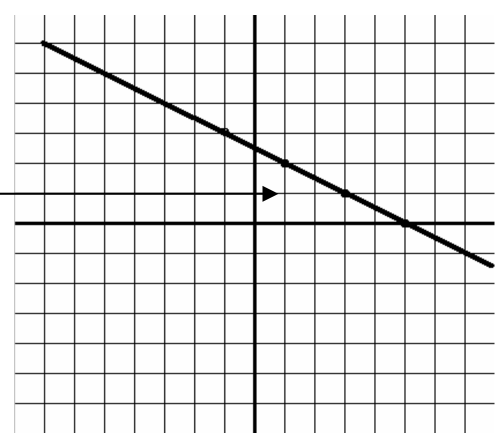


Les 2 droites sont parallèles, il n'y a aucun point de rencontre, il n'y a **<u>aucune</u>** solution.



Droites confondues : si deux droites sont confondues, elles ont la même pente et une même ordonnée à l'origine; il y aura une infinité de points de rencontre; le système a une infinité de solution.

Soit le système suivant : $x + 2y = 5$ et $3x = -6y + 15$



Les deux droites sont superposées, on dit qu'elles sont confondues, il y a une **<u>infinité</u>** de solutions.

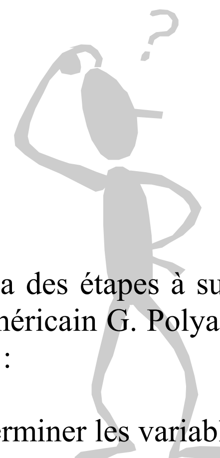
Exercices

i) $4x - 5y = -9$
$3x - 2y = 2$

j) $5x - 8y + 14 = 0$
$4x + 3y - 17 = 0$

k) $4x + 5y = 6$
$8x + 10y + 12 = 0$

l) $0{,}5x + 0{,}4y = 0{,}8$
$0{,}25x = -0{,}2y + 0{,}4$

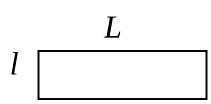


PROBLÈMES DE LA VIE COURANTE

On doit résoudre un problème de façon méthodique. Il y a des étapes à suivre et elles sont primordiales. Selon le mathématicien et pédagogue américain G. Polya, la méthode scientifique de résolution d'un problème comprend **<u>4 étapes</u>** :

1) Établir une **<u>hypothèse</u>** (qu'est ce qu'on cherche, déterminer les variables, que vaut x et que vaut y).
2) Élaboration du plan (il faut trouver le système d'équation, ça veut dire **<u>trouver les deux équations</u>**).
3) Exécution du plan (**<u>résoudre le système d'équation</u>** par la méthode de votre choix).
4) Analyse de la solution (vérifier que votre **<u>réponse est vraisemblable</u>**, que le couple solution a du sens).

a) Un propriétaire calcule qu'il devrait dépenser 3 300 \$ pour clôturer entièrement un terrain rectangulaire. S'il clôturait 3 côtés au lieu de 4, il ne dépenserait que 2 250 \$. Le prix de revient de la clôture est de 30 \$ le mètre. Calculez les dimensions du terrain.



Hypothèse : un terrain rectangulaire, il y a donc une longueur et une largeur.
On a alors L = longueur et l = largeur

Les 2 équations : On doit trouver les dimensions du terrain qui sont en : **mètre**
Or, pour clôturer entièrement le terrain, ça lui coûte 3 300 \$.

Donc, on pourrait faire 3 300 \$ / 30 \$, ça nous donne 110 mètres pour 4 côtés. Il ne dépenserait que 2 250\$ pour 3 côtés, on prend 2 250 \$ / 30 \$ = 75 m pour 3 côtés. **Si on veut clôturer, ça prend le périmètre du terrain et non l'aire.**

On peut faire nos équations : 1 4 côtés, c'est le périmètre totale, on a alors
$2L + 2l = 110$

2 3 côtés, on doit enlever une largeur ou une longueur.
$1L + 2l = 75$

Résoudre le système par la méthode de votre choix :

Par élimination :

$$\begin{array}{rl} & 2L + 2l = 110 \\ + & \\ & 1L + 2l = 75 \end{array}$$ on × par -1, on aura alors

$$\begin{array}{rl} & 2L + \cancel{2l} = 110 \\ + & \\ & -1L - \cancel{2l} = -75 \\ \hline \end{array}$$ les « l » vont s'éliminer

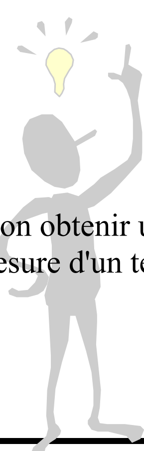
Il reste alors à faire l'addition : $1L = 35$, la longueur du terrain est de 35 mètres.

On remplace la donnée trouvée dans l'une ou l'autre des équations de départ :

$2L + 2l = 110$
$2(35) + 2l = 110$
$70 + 2l = 110$
$2l = 110-70$
$2l = 40$
$l = 40/2$
l = 20 mètres

On pourrait faire une vérification pour savoir si notre réponse est vraisemblable.

$2L + 2l = 110$
$2(35) + 2(20) = 110$
$70 + 40 = 110$
$110 = 110$



On pourrait également se poser la question à savoir : peut-on obtenir une valeur négative? Non, car il ne peut y avoir de longueur négative pour la mesure d'un terrain.

Nos 4 étapes sont complétées…
Passons aux exercices…

EXERCICES :

1) Suzanne constate que son loyer égale le tiers de son salaire mensuel. Elle trouve un nouvel emploi et gagne 450 $ de plus par mois. Son loyer égale maintenant le quart de son salaire mensuel. Calculez son ancien et son nouveau salaire mensuel.

2) Le prix de location d'une voiture comprend un prix forfaitaire et un tarif au kilomètre. Louis parcourt 123 km et paie 101,90 $. Rosita loue la même voiture. Elle parcourt 183 km et paie 119,90 $. Calculez le prix forfaitaire et le tarif au kilomètre.

3) Deux jeunes vendent des calendriers pour se faire un peu d'argent de poche. Il leur revient 2 $ par calendrier vendu. Nelson a vendu 14 calendriers de plus que Richard. Ensemble, Richard et Nelson ont gagné 56 $. Combien chacun a-t-il vendu de calendriers?

4) Marie a 6 ans de moins que sa sœur Jeanne. L'âge de Marie égale les deux tiers de celui de Jeanne. Calculez l'âge de chacune.

5) John collectionne les disques de deux groupes. Il a 70 disques. Le nombre de disques de son groupe préféré est le double de celui de l'autre groupe moins deux. Combien de disques possède-t-il de chaque groupe?

6) Quatre-cent-cinquante personnes assistent à un spectacle. Le prix du billet d'entrée pour les enfants est de 4 $. Celui du billet d'entrée pour les adultes est de 10 $. La recette totale est de 3 300 $. Calculez le nombre d'adultes et le nombre d'enfants.

7) Rafik a acheté des bas et des camisoles. Les bas se vendent 2,50 $ la paire et les camisoles 5 $ chacune. S'il a payé 87,50 $ pour le tout et s'il a acheté 3 fois plus de bas que de camisoles, combien a-t-il acheté de bas et de camisoles?

8) Un libraire reçoit 510 volumes dans 15 caisses (8 grandes et 7 petites). Une grande caisse contient 15 volumes de plus qu'une petite. Calculez le nombre de livres dans une grande et une petite caisse.

9) En 1991, Nicolas a acheté 8 livres de plus que de disques compacts. Le prix moyen des livres est de 14,25 $. Celui des disques compacts est de 21,45 $. Ces achats lui ont coûté 471 $. Calculez le nombre de livres et le nombre de disques compacts que Nicolas a achetés.

10) Sébastien reçoit une commission de 25 % du chiffre de ses ventes d'annonces pour un poste de radio. On lui offre de lui verser un salaire hebdomadaire de 300 $, mais d'abaisser son pourcentage de commission à 20 %. Pour quel chiffre de ventes recevrait-il le même salaire dans les deux modes de rémunération?

LES INÉQUATIONS

Qu'est-ce qu'une inéquation? Une inéquation est un énoncé formé de deux expressions algébriques reliées par l'un des signes d'inégalité : soit $<$ **,** $>$ **,** $\leq$ **ou** $\geq$

Ce sont des notions déjà vues en secondaire 2 mais cette fois appliquées à 2 variables.

On devra résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux variables (inconnues), c'est-à-dire trouver la région solution. On trouvera en premier la région pour une inéquation et, par la suite, on trouvera la région solution pour la deuxième inéquation. La région qui sera chevauchée (superposée) par les deux inéquations sera l'ensemble (région) solution du système d'inéquation.

Soit le système d'inéquation suivant : 1 $x + y < 3$ et 2 $y - x \geq 2$

1) Représentation de la première inéquation :

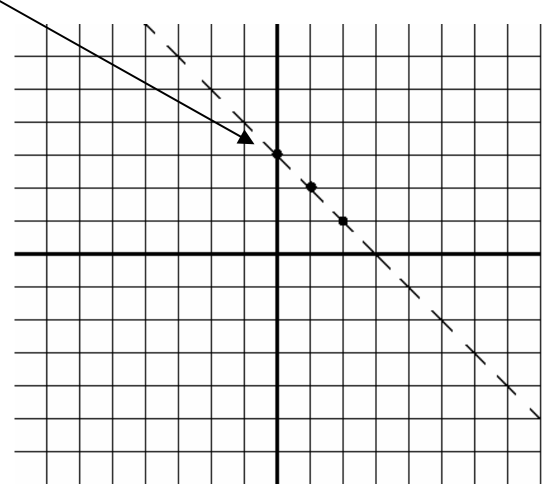
On fait une table de valeurs comme si on avait un signe =, on a alors :

1 $x + y = 3$

$y = -x + 3$ on isole la variable y, c'est plus simple de faire la table de valeurs.

x	y
0	3
1	2
2	1

2) On trace la droite en trait pointillé car nous n'avons pas le signe = en dessous du signe <. C'est un peu le même principe qu'en 2^e secondaire, on faisait un rond vide (blanc) sur la droite numérique vis-à-vis notre réponse.



3) On prend un point en dessous de la droite ou au-dessus afin de vérifier s'il fait parti de la région solution. Le point que vous prenez n'a pas d'importance en autant qu'il ne soit pas sur la droite. On remplace les coordonnées x et y de notre inéquation par les coordonnées du point choisi. On vérifie si ça correspond avec le sens de l'inéquation.

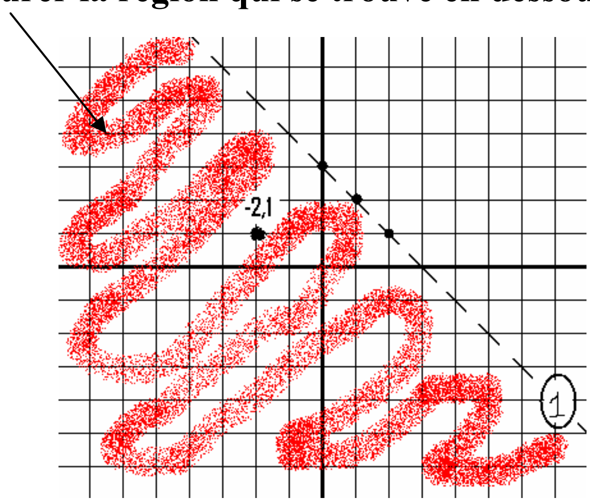
Prenons par exemple le point (-2 ,1) qui se situe en dessous de la droite.

$x + y < 3$

$-2 + 1 < 3$ on remplace les coordonnées x et y

$-1 < 3$ est-ce que -1 est plus petit que 3, **oui**, le point (-2,1) fait donc parti de la région solution pour notre 1re inéquation.

On va hachurer la région qui se trouve en dessous de la droite 1

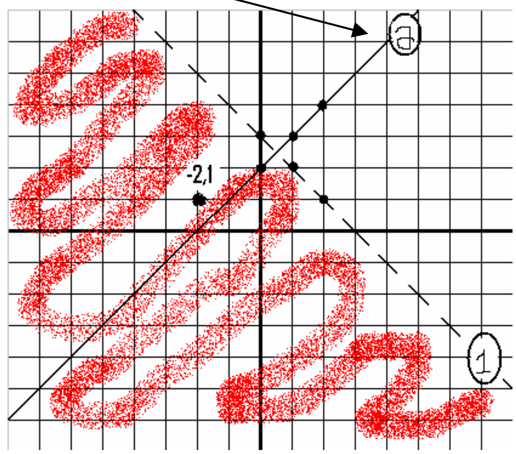


4) On refait les mêmes étapes pour l'inéquation 2 et on trace sur le même graphique.

$y – x = 2$
$y = x + 2$ on isole la variable y

x	y
0	2
1	3
2	4

On trace la droite en trait plein car nous avons le signe = en dessous du signe >. C'est un peu le même principe qu'en 2[e] secondaire, on faisait un rond plein (noir) sur la droite numérique vis-à-vis notre réponse.



On prend un point en dessous de la droite ou au-dessus afin de vérifier s'il fait parti de la région solution. Le point que vous prenez n'a pas d'importance en autant qu'il ne soit pas sur la droite. On remplace les coordonnées x et y de notre inéquation par les coordonnées du point choisi. On vérifie si ça correspond avec le sens de l'inéquation.

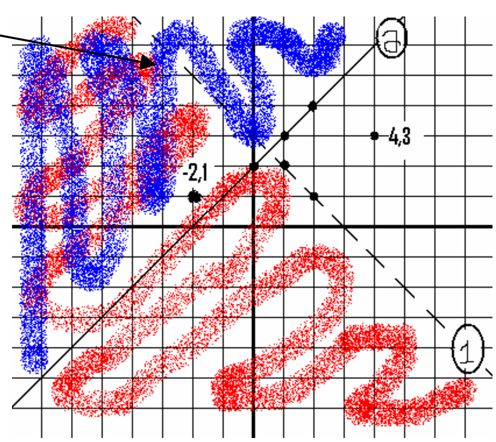
Prenons par exemple le point (4 , 3) qui se situe en dessous de la droite.

$y - x \geq 2$

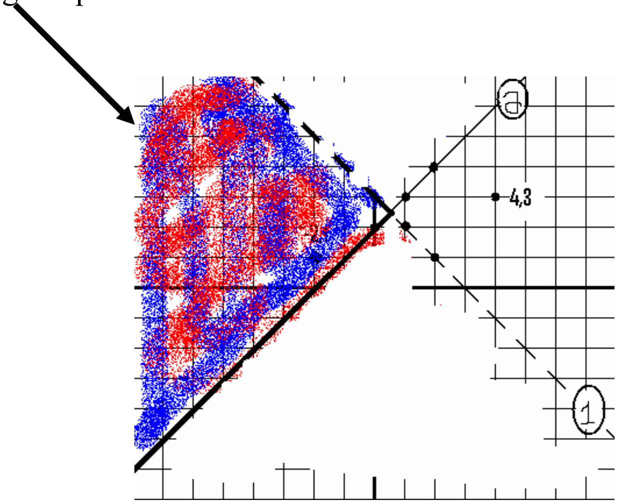
$4 - 3 \geq 2$ on remplace les coordonnées x et y

$1 \geq 2$ est-ce que 1 est plus grand que 2, **non**, le point (4,3) ne fait donc pas parti de la région solution pour notre 2[e] inéquation.

On va hachurer la région qui se trouve au-dessus de la droite 2



L'ensemble solution du système d'inéquations est l'intersection des ensembles solutions des deux inéquations. C'est la région qui a les 2 couleurs.



EXERCICES :

Trouvez la région solution des systèmes d'inéquations suivantes :

a) $2x + y < 5$
   $3x - 2y \leq 4$

b) $5x - 3y > 0$
   $x - 4y \geq 0$

c) $2x + 3y \geq 5$
   $7x - 3y < 31$

Ceci termine la matière sur les équations et les inéquations 2. Si vous avez des difficultés avec certaines parties de la matière, demandez à votre formateur des informations et des exercices supplémentaires.