

Cours
MAT-5170-2
Optimisation en contexte fondamental

Mathématique



PRÉSENTATION DU COURS

Le but du cours *Optimisation en contexte fondamental* est de rendre l'adulte apte à traiter des situations qui requièrent l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire dans une perspective fondamentale.

L'adulte qui suit le cours cherche une solution optimale à une situation comportant un ensemble de contraintes. Il tient compte de ces contraintes et les traduit en employant un système d'inéquations à deux variables et définit la fonction à optimiser. Sa représentation graphique de la situation lui permet d'observer le polygone de contraintes ou la région solution pour résoudre graphiquement ou algébriquement le système.

La situation-problème amène l'adulte à optimiser une relation linéaire, qu'elle soit économique ou objective. Elle lui permet d'agir en fonction de contraintes à respecter, et l'analyse qu'il en fait le conduit à déterminer la solution qui lui semble la plus avantageuse. L'adulte apprend à illustrer son raisonnement et à expliciter la solution optimale qu'il a dégagée. Ainsi, il démontre comment il a procédé pour interpréter la région solution et les sommets du polygone. Il importe donc que l'adulte ait pris soin de vérifier la vraisemblance du résultat obtenu selon le contexte, et de spécifier le degré de précision dont il a tenu compte. S'il constate que le résultat auquel il est arrivé est peu probable, il propose des modifications, suggère une nouvelle piste de solution et formule des recommandations pour la rendre plus efficiente.

Au terme de ce cours, l'adulte sera en mesure de représenter des situations d'optimisation. Sa production, juste et claire, sera réalisée dans le respect des règles et des conventions mathématiques. L'adulte fera ressortir les solutions limites dans son analyse ainsi que les solutions entières lorsque la situation fera référence à des cas discrets ou que l'une des limites se retrouvera sur les points de grille.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre les situations-problèmes proposées, l'adulte a recours aux trois compétences disciplinaires, soit :

- *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes;*
- *Déployer un raisonnement mathématique;*
- *Communiquer à l'aide du langage mathématique.*

L'emploi de stratégies efficaces incite l'adulte à déployer un raisonnement mathématique rigoureux et à communiquer avec clarté à l'aide du langage mathématique, en démontrant qu'il en respecte les codes et les conventions propres. C'est donc par l'activation intégrée des trois compétences

disciplinaires et à l'aide d'autres ressources que l'adulte parvient à résoudre des situations-problèmes.

La rubrique *Démarche et stratégies* explique comment faire évoluer une situation-problème vers une solution par la mise à contribution des trois compétences disciplinaires.

DÉMARCHE ET STRATÉGIES

Pour résoudre une situation-problème, l'adulte a besoin de stratégies efficaces qu'il adapte aux situations présentées.

Il traite des situations-problèmes en utilisant une démarche qui comprend quatre phases de résolution :

- **la représentation;**
- **la planification;**
- **l'activation;**
- **la réflexion.**

Le tableau qui suit présente sommairement chacune des phases de la démarche de résolution et quelques exemples de stratégies que l'adulte peut employer pour traiter les situations. Ces phases ne se présentent pas nécessairement de façon successive. De nombreux allers-retours entre les quatre phases peuvent être nécessaires lors de la résolution d'une situation-problème.

| DÉMARCHE ET STRATÉGIES | |
|---|--|
| LA REPRÉSENTATION | |
| <ul style="list-style-type: none"> - L'adulte prend contact avec la situation-problème afin de bien cerner le contexte, le problème et la tâche à effectuer. Il construit sa représentation de la situation en employant des stratégies d'observation et de représentation essentielles au raisonnement inductif. - Durant cette appropriation du contexte et du problème, il est aussi amené à déployer des raisonnements déductifs. - Il a une maîtrise adéquate des éléments rattachés au langage mathématique. | |
| Exemples de stratégies | <ul style="list-style-type: none"> • déterminer dans un tableau, la nature de la tâche à exécuter; • écrire littéralement les éléments de la situation qui lui semblent pertinents, facilitant ainsi la recherche des contraintes économiques ou techniques pour mathématiser le problème; • déterminer des questions en rapport avec celle-ci; • recueillir les informations pertinentes (maximum, minimum, fonction économique). |
| LA PLANIFICATION | |
| <ul style="list-style-type: none"> - Afin de planifier sa solution, l'adulte cherche des pistes et privilégie celles qui semblent les plus efficaces et économiques. - Une planification correcte implique de sa part le décodage des éléments du langage mathématique, le sens des symboles et des termes, les notations. | |
| Exemples de stratégies | <ul style="list-style-type: none"> • rechercher une règle algébrique qui tiendrait compte de la meilleure relation entre les contraintes et les conséquences imposées par la situation-problème : déterminer les paramètres pertinents de la droite baladeuse ou de la fonction économique; • procéder par esquisse intuitive pour borner graphiquement (rectangle parallèle aux axes du plan cartésien) l'ensemble solution. |
| L'ACTIVATION | |
| <ul style="list-style-type: none"> - Placé au cœur du traitement d'une situation-problème, l'adulte déploie un raisonnement mathématique en présentant graphiquement les demi-plans issus des contraintes. - Il déduit le pas des axes en analysant les valeurs maximale et minimale que peuvent prendre les variables. - Il utilise un langage mathématique rigoureux et respecte le sens des symboles, des termes et des notations afin d'éviter la confusion. | |
| Exemples de stratégies | <ul style="list-style-type: none"> • procéder par essais et erreurs pour mathématiser certaines contraintes; • construire des tables de valeurs afin d'avoir deux points pour représenter les droites frontières du polygone de contraintes; • procéder par étapes successives dans le but de résoudre les inéquations. |
| LA RÉFLEXION | |
| <ul style="list-style-type: none"> - L'adulte adopte une attitude réflexive tout au long du traitement de la situation, se questionne régulièrement sur ses étapes de son travail et sur les choix qu'il fait. - Il fait des allers et retours sur le graphique et la fonction économique lorsque les solutions sont entières. - Il exprime ses idées en respectant les codes et les conventions mathématiques et tient compte des contraintes de la situation dans l'expression de son message. | |
| Exemples de stratégies | <ul style="list-style-type: none"> • vérifier la cohérence de sa solution en comparant, par exemple, le nombre de solutions possibles d'un système d'équations avec le nombre de solutions trouvées ou en validant intuitivement, que les coordonnées des points trouvés sont bien celles des sommets du polygone de contraintes; • utiliser des logiciels de représentation graphique comme outil de validation. |

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Les compétences transversales ne se construisent pas dans l'abstrait : elles prennent racine dans des situations-problèmes et participent, à divers degrés, au développement des compétences disciplinaires, et inversement.

Plusieurs compétences transversales peuvent contribuer au traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours : *Résoudre des problèmes* et *Exploiter l'information*.

Compétence d'ordre intellectuel

Si la compétence transversale *Résoudre des problèmes* est intimement liée à la mathématique, elle peut être abordée sous un angle plus large, dans une situation d'apprentissage plus vaste où la mathématique s'avère un atout de taille. C'est le plus souvent par tâtonnement et recadrage du problème que l'on parvient à construire une solution qui, tout en étant satisfaisante, n'est pas la seule possible. Dans le but de mobiliser et de développer cette compétence, l'adulte peut être mis à contribution pour construire lui-même des situations d'apprentissage associées à un questionnement qui lui est propre. Souvent, la programmation linéaire offre la souplesse nécessaire de modélisation et de construction du réel par linéarisation du monde observable.

Compétence d'ordre intellectuel

Traiter une situation d'apprentissage en relation avec le concept d'aide humanitaire pourrait permettre à l'adulte de développer et de mobiliser sa compétence transversale *Exploiter l'information*. Il faut non seulement savoir repérer cette information et juger de sa valeur, mais aussi apprendre à l'organiser. Aborder des problématiques telles que le déploiement des militaires en Afghanistan ou au Timor oriental offrirait à l'adulte une belle occasion d'organiser l'information trouvée sur le Web pour planifier et optimiser un plan pour les effectifs à déployer.

CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, l'adulte réactive et approfondit un ensemble de savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, il complète sa formation en s'appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

En vue de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, l'adulte développe un procédé intégrateur énoncé comme suit :

- **l'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.**

Ce procédé, mis en valeur dans les situations d'apprentissage du présent cours, favorise l'intégration des savoirs mathématiques et des compétences disciplinaires. Les situations d'apprentissage proposées devront toucher ce procédé intégrateur.

| Savoirs mathématiques | Limites et précisions |
|--|--|
| <p>Programmation linéaire</p> <ul style="list-style-type: none"> • Système d'inéquations du premier degré à deux variables • Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser (fonction objectif ou économique) • Détermination et interprétation des sommets et de la région solution (fermée ou non) • Modification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente | <p>La représentation des contraintes peut se faire sous forme algébrique ou graphique.</p> <p>Dans ce cours, l'expression est limitée à la fonction à optimiser par une équation de la forme $Ax + By + C = Z$ dans laquelle A, B et C sont des nombres rationnels.</p> |

Repères culturels

Ce sont les travaux des mathématiciens Joseph Fourier (1768-1830) et Georges Dantzig (1914-2005) qui sont à l'origine de la programmation linéaire. Au cours de la Seconde Guerre mondiale, Dantzig, qui était dans l'armée de l'air américaine, mit au point une technique permettant de régler au moindre coût le problème de distribution de l'armée. Cette méthode qui allie puissance et souplesse a été récupérée pour résoudre des problèmes économiques variés.

Dans le domaine de la santé, certaines décisions sont souvent controversées parce que subordonnées à des intérêts financiers. La programmation linéaire, une branche de l'optimisation, est très utile pour guider la prise de décision dans ce domaine. Elle peut aussi aider à résoudre des problèmes d'optimisation dans de nombreux autres domaines.

On pourrait penser aux conflits d'intérêt qui menacent la protection de l'environnement. Par exemple, pour nourrir une population ou pour lui fournir de l'énergie, jusqu'où peut-on exploiter un milieu sans le détruire? L'adulte pourrait étudier comment certains scientifiques ont pu répondre à cette question et déterminer un point d'équilibre grâce à la programmation linéaire.

En permettant les calculs et le traitement des données, l'informatique facilite grandement la recherche de solutions optimales. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles l'optimisation a envahi de nombreux champs d'activité. L'adulte ne pourra donc que constater, encore une fois, l'apport indéniable de la mathématique à la recherche de solutions optimales.

FAMILLE DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

La famille *Recherche de solutions optimales* visée par ce cours regroupe les situations dont le problème peut être en partie traité par l'optimisation, à l'aide de la programmation linéaire. Le cours *Optimisation en contexte fondamental* fournit l'occasion à l'adulte de poser des actions en vue de le rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes de ce cours, l'adulte est amené, entre autres, à reconnaître et décoder le sens des symboles, des termes et des notations, à distinguer le sens des termes mathématiques de ceux qui relèvent du sens commun ou encore, à déduire la solution optimale en substituant, aux coordonnées de l'équation de la fonction économique, les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.

DOMAINES GÉNÉRAUX DE FORMATION

Les domaines généraux de formation couvrent les grands enjeux contemporains. Idéalement, le choix des situations à traiter doit être fait dans le respect des intentions éducatives des différents domaines généraux de formation puisque ces domaines représentent des toiles de fond sur lesquelles se greffent les situations-problèmes servant ainsi à donner du sens aux apprentissages de l'adulte. Deux de ces domaines sont particulièrement appropriés à ce cours : *Santé et bien-être* et *Environnement et consommation*.

Santé bien-être

Certaines situations d'apprentissage proposées sensibilisent l'adulte au domaine de la santé. Le cours d'optimisation pourrait présenter des situations où les inquiétudes relatives à la santé sont écartées au profit d'intérêts financiers. C'est parfois, pour l'adulte, l'occasion d'objectiver des situations d'apprentissage illustrant le mince équilibre entre la santé et le profit tiré des décisions de certaines entreprises. Ce cours favorise l'étude de problèmes dont la solution doit tenir compte, d'une part, des besoins en matière de santé et, d'autre part, de la diminution des dépenses. L'adulte est amené à se responsabiliser par rapport à l'adoption de saines habitudes de vie, ce qui correspond à l'un des axes de développement du DGF *Santé et bien-être*.

Environnement et consommation

Certaines situations d'apprentissage liées aux techniques de raffinage du pétrole peuvent inciter l'adulte à entretenir un rapport dynamique avec son milieu, tout en gardant une distance critique à l'égard de la consommation et de l'exploitation de l'environnement. Le calcul de l'obtention du meilleur préchauffage des bruts et des charges ainsi que la détermination du meilleur équilibre « vapeur-électricité » d'une raffinerie sont deux exemples d'optimisation qui touchent des problématiques environnementales. Un exposé sur de telles problématiques incite l'adulte à se construire des références en vue de décisions ultérieures.

EXEMPLE DE SITUATION D'APPRENTISSAGE

Toutes les situations d'apprentissage ou situations-problèmes, peu importe le domaine général de formation retenu, placent l'adulte au cœur de l'action. Elles favorisent le développement des compétences disciplinaires et transversales visées, l'acquisition de notions et de concepts mathématiques de même que la mobilisation de ressources diverses utiles à la réalisation de la tâche.

Le tableau qui suit présente les éléments nécessaires à l'élaboration de toute situation d'apprentissage ou situation-problème. On y précise ceux retenus dans l'énoncé de situation-problème décrit à la page suivante.

| ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES À L'ÉLABORATION D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE, D'UNE SITUATION-PROBLÈME | |
|--|--|
| Domaine général de formation (ciblé) – Permet de contextualiser les apprentissages, de leur donner du sens. | <ul style="list-style-type: none"> • Environnement et consommation |
| Compétences disciplinaires (prescrites) – Se développent dans l'action. Nécessitent la participation active de l'adulte. | <ul style="list-style-type: none"> • Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes • Déployer un raisonnement mathématique • Communiquer à l'aide du langage mathématique |
| Famille de situations d'apprentissage (prescrite) – Regroupe des situations appropriées au cours à partir de problématiques tirées de la réalité. – Permet, entre autres, l'acquisition de connaissances mathématiques. | <ul style="list-style-type: none"> • Recherche de solutions optimales |
| Compétences transversales (ciblées) – Se développent en contexte en même temps que les compétences disciplinaires. | <ul style="list-style-type: none"> • Résoudre des problèmes • Exploiter l'information |
| Savoirs essentiels (prescrits) – Sont des connaissances, des concepts, des notions mathématiques à acquérir. | <ul style="list-style-type: none"> • Voir liste |

Cette rubrique propose, en fait, un exemple d'énoncé de situation-problème accompagné d'exemples d'actions associées au traitement mathématique. Cet énoncé est constitué d'un contexte qui sert de fil conducteur, mais les activités d'apprentissage incluses n'y sont pas détaillées de façon formelle. L'accent est plutôt mis sur un exemple de traitement mathématique pertinent, qui respecte les quatre phases de la résolution : la représentation, la planification, l'activation et la réflexion. Toutefois, même si ce n'est pas explicite, on peut discerner les éléments qui composent cet énoncé, éléments identifiés dans le précédent tableau, soit : le domaine général de formation, les compétences disciplinaires, la famille de situations, les compétences transversales et les savoirs essentiels. Pour favoriser l'apprentissage, ces différents éléments doivent former un tout cohérent et signifiant pour l'adulte.

L'enseignante ou enseignant peut se servir de chacun des éléments comme autant d'objets de formation. Ces objets peuvent être des actions associées à chacune des phases de résolution, des actions relatives aux compétences disciplinaires ou transversales ou encore aux savoirs prescrits. L'enseignante ou enseignant a la possibilité d'utiliser l'exemple de traitement mathématique fourni pour construire d'autres tâches complexes ou d'autres activités d'apprentissage liées aux connaissances mathématiques que l'adulte doit acquérir.

| Énoncé de situation-problème | Exemples d'actions associées au traitement mathématique d'une situation-problème appartenant à la famille <i>Recherche de solutions optimales</i> |
|---|--|
| <p>L'industrie du transport par camion constitue un secteur extrêmement important de l'activité économique canadienne. Même si elle se porte bien, cette industrie doit être en mesure de faire face à de nombreux défis comme la compétition ou encore la hausse du prix du carburant. Par conséquent, la gestion des parcs de camions doit être très serrée et les entreprises de camionnage préfèrent maximiser l'utilisation de leurs véhicules avant d'en augmenter le nombre.</p> | <p>Procédé intégrateur : <i>Optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire</i> Au cours de l'une ou l'autre des phases de résolution, l'adulte pourrait accomplir les actions suivantes :</p> <p>Représentation</p> <ul style="list-style-type: none"> • Écrire littéralement les éléments de la situation qui lui semblent pertinents; • Déterminer les variables en jeu comme le nombre de chauffeurs et le kilométrage parcouru; • Diviser la situation-problème complexe en sous-problèmes pour mettre en relief les relations entre les contraintes de l'énoncé et le problème : les coûts liés au fonctionnement de l'entreprise, les revenus qu'elle peut espérer en tirer, la maximisation du rendement de l'entreprise, l'analyse du système d'inéquations en fonction de la droite baladeuse. |

| Énoncé de situation-problème | Exemples d'actions associées au traitement mathématique d'une situation-problème appartenant à la famille <i>Recherche de solutions optimales</i> | |
|--|--|---|
| <p>On demande à l'adulte de maximiser l'utilisation d'un parc de camions en tenant compte de certaines contraintes comme le nombre maximum d'heures de travail consécutives permises, le coût minimum de fonctionnement d'un camion par kilomètre parcouru, etc. L'adulte devra faire ressortir les solutions limites. De plus, la droite baladeuse est parallèle à l'un des côtés du polygone de contraintes et on demande à l'adulte de démontrer que cette situation peut être la cause de plusieurs valeurs optimales.</p> | Planification | <ul style="list-style-type: none"> • Utiliser des techniques de foisonnement d'idées si le travail se fait en équipe, pour rechercher des pistes de solution; • Se référer à la solution d'une situation-problème analogue pour concrétiser son plan; • Énumérer les savoirs mathématiques nécessaires au traitement de la situation : choix des variables, détermination des contraintes, établissement d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables, représentation graphique de la région solution, comparaison de la pente des côtés du polygone de contraintes et de la droite baladeuse dans le but de déterminer les droites parallèles, etc. |
| | Activation | <ul style="list-style-type: none"> • Sélectionner les variables : nombre de chauffeurs, kilométrage parcouru; • Par essais et erreurs, mathématiser les contraintes de la situation; • Construire des tables de valeurs afin de tracer les droites délimitant le polygone de contraintes; • Déterminer le sommet du polygone de contraintes qui optimise la rentabilité du parc de véhicules; • Calculer le coût minimal de fonctionnement; • Déterminer le côté parallèle à la droite baladeuse (fonction économique), puis démontrer la possibilité de solutions multiples. |
| | Réflexion | <ul style="list-style-type: none"> • Vérifier la cohérence de la réponse en s'assurant, à l'aide d'un point aléatoire, que la région solution a été correctement déterminée; • Comparer sa solution et ses résultats avec ceux de ses pairs, dans le but de faire ressortir les forces et les faiblesses du modèle proposé; • Se demander si un autre moyen plus simple permettrait de déterminer les sommets du polygone de contraintes (par comparaison plutôt que par substitution par exemple); • Se questionner sur le rôle des paramètres de la droite baladeuse. |

ATTENTES DE FIN DE COURS

Pour résoudre des situations-problèmes de la famille *Optimisation*, l'adulte optimise une situation à l'aide de la programmation linéaire. Pour ce faire, il met en œuvre les trois compétences disciplinaires du programme, soit : *Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*.

L'adulte qui utilise la programmation linéaire pour résoudre des situations-problèmes met à profit divers modèles mathématiques et stratégies de différents ordres, combinant raisonnement et créativité pour surmonter les obstacles. Il décode l'information pertinente en vue de planifier la recherche d'une solution optimale. Il traduit les différentes contraintes en employant un système d'inéquations à deux variables et définit algébriquement la fonction à optimiser. Il représente graphiquement le polygone de contraintes et la région solution. Les coordonnées des sommets sont déterminées soit algébriquement, soit par approximation à partir de graphique. Pour démontrer une conjecture, il déploie un raisonnement déductif structuré et utilise adéquatement la forme codifiée que requiert la démonstration. Il appuie son argumentation d'illustrations, d'explications ou de justifications. Lorsqu'il établit la preuve (par l'absurde, par la contraposée, par induction, etc.), il sollicite divers types de raisonnement, dont la disjonction de cas. Il observe des cas particuliers issus de la réalité et généralise ses observations. Enfin, l'expérimentation de certaines situations le conduit à analyser des données en vue de dégager les conditions nécessaires et suffisantes pour tirer une conclusion, à prendre des décisions et à déterminer la meilleure façon de procéder, d'optimiser ou de procéder à une régulation.

Lorsqu'il réalise des études de cas, des synthèses, des preuves ou des démonstrations et des exposés pour traiter des situations-problèmes liées à la programmation linéaire, il cible astucieusement l'intention des messages mathématiques à émettre ou à interpréter. Il sélectionne le médium, le type de discours et de registre de représentation adaptés à l'interlocuteur et à l'intention du message. Il effectue aisément le passage d'un registre à l'autre. Il utilise un large éventail de stratégies de communication qui lui permettent, entre autres, de réguler la transmission d'un message selon les réactions spécifiques de l'interlocuteur ou pour tenir compte d'exigences nouvelles. Il s'approprie un langage qui combine de façon pertinente des termes courants, mathématiques, techniques et scientifiques.

Tout au long de la résolution de situations-problèmes, l'adulte utilise ses connaissances en lien avec les savoirs mathématiques, soit la programmation linéaire. L'emploi des symboles, des termes et des notations liés à ces savoirs est exact et les lois, théorèmes, corollaires ou lemmes déduits ou induits par l'adulte sont toujours validés à l'aide de différentes sources afin de bonifier sa bibliothèque mathématique personnelle. De plus, il n'hésite pas à demander de l'aide lorsqu'une difficulté se présente.

CRITÈRES D'ÉVALUATION DES COMPÉTENCES VISÉES PAR LE COURS

Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes

- *Manifestation, oralement ou par écrit, d'une compréhension adéquate de la situation-problème*
- *Mobilisation de stratégies et de savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème*
- *Élaboration d'une solution* appropriée à la situation-problème*
- *Validation appropriée des étapes** de la solution élaborée*

* La solution comprend une démarche, des stratégies et un résultat.

** Le modèle mathématique, les opérations, les propriétés ou relations.

Déployer un raisonnement mathématique

- *Formulation d'une conjecture appropriée à la situation*
- *Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés*
- *Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation*
- *Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente*
- *Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente*

Communiquer à l'aide du langage mathématique

- *Interprétation juste d'un message à caractère mathématique*
- *Production d'un message conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et en fonction du contexte*