La Revue de l'ADOQ

LES INCONTOURNABLES DU NOMBRE

PAR **NATHALIE BISAILLON** ET **MICHEL LYONS**
EN COLLABORATION AVEC **LES EXPERTISES DIDACTIQUES LYONS INC.**

L'ADOQ
L'Association des Orthopédagogues du Québec

TABLE DES MATIÈRES

MOT DE LA PRÉSIDENTE

Chers membres,

Encore une fois, L'ADOQ est fière de s'associer à M. Michel Lyons et Mme Nathalie Bisaillon en diffusant gratuitement une nouvelle édition, révisée et augmentée, de la revue portant sur les mathématiques.

Ce dossier spécial a fait l'objet d'une brève présentation lors du colloque 2011 "L'orthopédagogue au coeur des mathémaTICs" à Rimouski et a suscité un vif intérêt. Une version électronique est disponible sur notre site Internet www.ladoq.ca. En plus d'avoir une présentation dynamique et interactive, ce format vous permettra d'avoir toujours accès à la version la plus récente! Un avantage pour tous!

C'est un plaisir d'annoncer qu'une formation en lien avec le contenu de cette revue vous sera offerte par L'ADOQ au printemps 2013 par M. Lyons et Mme Bisaillon, eux-mêmes.

Nous espérons ainsi répondre à vos besoins et à vos attentes. Nous sommes à l'écoute de vos suggestions, vos propositions et vos commentaires. Alors, n'hésitez pas à nous en faire part par courriel à info@ladoq.ca

Le conseil d'administration travaille en équipe pour vous offrir le meilleur service possible.

Je tiens à remercier spécialement M. Michel Lyons et Mme Nathalie Bissaillon pour leur grande générosité, leur temps, pour leur appui ainsi que leur confiance envers L'ADOQ.

Merci à tous les bénévoles du comité du site Internet ayant gracieusement offert leur temps pour rendre ce projet accessible à tous !

Merci au Secrétariat de L'ADOQ pour tout son travail et son dévouement, car sans son équipe ce projet ne serait pas là.

Merci à tous !
Bonne lecture et utilisez-la au maximum !

Édith-Kathie Ayotte

Édith-Kathie Ayotte, présidente

MOT DU SECRÉTARIAT DE L'ADOQ

Chers membres,

Nous vous offrons la possibilité de nous faire parvenir des textes que nous archiverons en les classant par sujet en vue des prochaines parutions. Si l'offre vous intéresse, il suffit de nous faire parvenir votre article, par courriel seulement, à info@ladoq.ca

Cependant, nous ne nous engageons pas à tout publier, nous nous réservons le droit de sélectionner les textes les plus pertinents.

La revue de L'ADOQ est réalisée par les membres du conseil d'administration en collaboration avec le Secrétariat de L'ADOQ et le comité du site Internet. C'est pourquoi votre collaboration est essentielle soit par vos commentaires, vos suggestions, vos articles, vos commandites ou toute autre idée pour nous permettre de nous améliorer et de nous actualiser.

Au plaisir de vous voir y contribuer en grand nombre et sachez que votre collaboration en lisant le tout est tout aussi importante à nos yeux.

Coordonnateurs : Catherine Asselin, Julie Couët, Josianne Couture
Auteurs : Michel Lyons et Nathalie Bissaillon
Conception graphique et dépôt sur le site Internet : Secrétariat de L'ADOQ. www.ladoq.ca

Adresse de la revue de L'ADOQ :
Secrétariat de L'ADOQ
7400, boul. Les Galeries d'Anjou
Montréal (Québec) Canada, H1M 3M2

Dépôt légal : 2011
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada
Numéro de publication :
Date de tombée du prochain numéro : mars 2012

Diagnostic en mathématiques

Par Nathalie Bisaillon et Michel Lyons

En pleine nuit, sur une artère située au centre-ville, un homme se déplace lentement, à quatre pattes, en scrutant le pavé.

« Vous avez pris un verre de trop, mon brave? questionne le policier qui observait son manège, depuis un bon moment.

– Non, non! répond aussitôt l'homme. Je cherche mon cellulaire… »

Une dame s'approche et voyant les deux compères affairés sur le trottoir et s'empresse de les assister. Au bout de dix minutes, une douzaine de bons samaritains quadrillent fébrilement la place, sans succès…

« Mais où vous teniez-vous donc, quand vous avez perdu votre foutu téléphone? demanda soudain le clochard, qui s'était joint à l'escadron de volontaires, sans trop d'enthousiasme pour cette battue nocturne.

– J'étais à 500 mètres d'ici, dans le stationnement du salon de quilles.

– Bon sang! Alors, pourquoi le cherchez-vous aussi loin? répliquèrent en chœur les charitables citoyens.

– C'est qu'il faisait très sombre dans ce stationnement. Ici, au moins, il y a de la lumière… »

Section 1 : Mythes et légendes de la rééducation en maths

Pour être efficace, la rééducation en mathématiques doit prioritairement cerner le lieu du problème et soigneusement éviter de se laisser attirer par des éclairages si rassurants soient-ils. Et si l'on désire promouvoir et dynamiser l'intervention orthopédagogique en mathématiques, il faut d'abord et avant tout déboulonner quelques mythes et légendes pédagogiques, qui ont la couenne plutôt dure.

Légende 1 : Maths et lecture, même combat!

Régler les problèmes de lecture aplanirait aussitôt les difficultés en mathématiques.

Le refrain est tellement ancré dans un certain discours pédagogique qu'il est devenu téméraire de le remettre en question. Pourtant, les contre-exemples abondent et crèvent les yeux. Combien d'élèves fonctionnant normalement en mathématiques obtiennent de piètres résultats en lecture? À commencer par le fils de l'un des auteurs, mordu des maths, qui martelait dès sa deuxième année du primaire : « *J'haiiiiiïs lire!* » À l'inverse, les élèves bons lecteurs sont-ils systématiquement exempts de retards importants en mathématiques? Parmi nos étudiants universitaires, nous ne comptons plus le nombre d'enseignants doués pour la langue de Molière, sous toutes ses coutures, qui déclarent être nuls en mathématiques. Nous prendraient-ils au sérieux si nous leur proposions de vaincre leurs démons en peaufinant leurs habiletés en lecture?

Il y a quelques années, le problème suivant a été posé à des milliers d'élèves du secondaire I et II :

> Une poule attachée à 1 poteau de clôture a 2 pattes.
> Une vache attachée à 2 poteaux de clôture a 4 pattes.
>
> Combien un cheval attaché à 3 poteaux de clôture a-t-il de pattes?

Plus de la moitié des jeunes interrogés ont échoué à ce problème, transformant en pieuvre dérisoire le pauvre cheval mathématiquement hybridé. Posez la même question à des élèves du préscolaire. Pas un enfant ne répondra « 6 pattes », la réponse de loin la plus populaire chez les élèves, à partir de la 4[e] année du primaire, jusqu'au secondaire… Problème de lecture ou triste séquelle d'un involontaire, mais dévastateur lavage de cerveau mathématique? Les mathématiques font appel à une structure spécifique de processus mentaux qui peuvent mal fonctionner. La lecture ne dépend pas systématiquement des mêmes structures mentales, bien que des ressemblances peuvent exister.

Légende 2 : Maux de mots

Les difficultés en mathématiques seraient d'abord une affaire de vocabulaire.

Cet éclairage commode peut sembler attrayant à quiconque est convaincu que « les mathématiques sont un langage ». Vue sous cet angle, la mémorisation du sens des termes comme *autant, produit, périmètre, sommet, commutativité, dénominateur, polynôme, cosinus, dérivée…* précéderait et faciliterait l'apprentissage des concepts qu'ils véhiculent. C'est exactement dans ce courant de pensée (le vocabulaire d'abord) que plusieurs d'entre nous ont étudié une langue seconde. Malgré d'excellentes notes, nous nous retrouvions souvent incapables de comprendre cette langue et encore moins de la parler! Après quelques mois de vacances, le vocabulaire mémorisé était oublié et tout devait être repris à zéro, l'année suivante… N'est-ce pas également la troublante réalité vécue par plusieurs élèves, dans leur cheminement en mathématiques?

Peu de domaines d'enseignement sont aussi obsédés de vocabulaire et de définitions que les mathématiques. « *Question de rigueur!* » diront les apôtres du lexique. On imagine mal un prof d'éducation physique qui adopterait une telle fixation pédagogique. Et encore moins un instructeur de pilotage! Au fait, combien d'informaticiens experts peuvent donner une définition rigoureuse du mot *clavier*? Est-ce à ce point fondamental et incontournable?

Parlant rigueur, la plupart des lexiques mathématiques sont farcis de définitions erronées pour cause de généralisation abusive, un véritable fléau des définitions mathématiques scolaires. À titre d'exemple, qui est loin d'être unique, on peut souvent lire qu'un *sommet* est le lieu géométrique où se rencontrent plusieurs arêtes d'un solide. Sans rire, on nous dit également qu'un cône est un solide qui, malgré les apparences, n'a pas de sommet… Le lieu pointu qui s'y trouve serait plutôt un *apex*, proclament les lexicographes amateurs. Une lecture perspicace nous enseigne pourtant que l'apex est défini comme *le « sommet » d'un cône…* Bref, voici un cône qui n'a pas de sommet, mais qui possède un apex, qui se trouve à être son sommet! On se croirait plus en politique ratoureuse qu'en mathématiques rigoureuses. Quand on s'intéresse au vocabulaire mathématique, il est bon de savoir que, dans la très grande majorité des cas, le sens mathématique d'un terme est issu d'une métaphore de la concrétisation originelle du concept en question. Ainsi, le terme *sommet* tire son origine métaphorique du lieu le plus élevé d'une montagne. Comment une pensée mathématique « rigoureuse » qui s'ingénie à fabriquer des définitions si essentielles a-t-elle pu se contorsionner au point de faire qu'un cône perde son sommet, sachant que la montagne est la plus évidente représentation du cône, dans la réalité? Rigueur rassurante ou rigidité désolante?

Enseigner les mathématiques avec l'obsession sclérosante du vocabulaire préalable et des définitions indispensables risque malheureusement de nous entraîner vers des sommets de « cônerie »! ☺ Le recours au mot juste aura toujours sa place, en mathématiques. Mais, comme ce fut le cas durant toute l'histoire de cette science et des autres, la place du vocabulaire et du symbolisme raffinés doit se situer bien plus proche du dernier virage que du premier embrayage.

Légende 3 : Le bonheur dans la répétition

L'exercice répétitif serait un environnement rassurant et valorisant pour l'élève en difficulté.

Le mythe voulant que l'élève en difficulté trouve son unique planche de salut dans les exercices répétitifs (*drills*) est encore largement entretenu. Le rôle de la répétition est pourtant aujourd'hui démystifié grâce aux recherches sur le cerveau. Tout geste systématiquement répété stimule la production de myéline, une sorte de gaine qui isole un chemin neuronal permettant d'accroître la vitesse d'exécution du parcours nerveux et donc de l'activité exercée. Cette accélération devient possible grâce à l'élimination inconsciente et involontaire de gestes jugés « inutiles ». C'est ainsi que l'on arrive à conduire sa voiture « sur le pilote automatique », de chez-soi à son lieu de travail. On devient tellement habitué au parcours qu'il n'est pas rare de constater qu'on a littéralement perdu de vue deux ou trois intersections familières. C'est aussi à cause de la sécrétion de myéline que l'on finit par emboutir une autre voiture venue de nulle part… dans une autre intersection très familière où un nouveau feu de circulation a été récemment installé.

En mathématiques, l'exercice répétitif permet principalement d'automatiser les algorithmes, les tables et la manipulation d'instruments (règle, compas, rapporteur, etc.). Utilisés en temps et lieu, les fameux « drills » auront toujours leur importance en apprentissage. Cependant, à l'heure où la technologie nous émerveille par sa fulgurante vitesse d'exécution et par l'infinie complexité des formules empilées dans des mémoires de plus en plus denses, il n'est plus possible de confondre *exécution technique* et *compréhension*. L'ordinateur calcule tout avec une formidable célérité et avec une précision inouïe. En revanche, la géniale machine affiche toujours une tragique incapacité compréhension.

Puisqu'il est question de distinguer l'efficacité technique et la compréhension, il serait opportun de rappeler que, parmi les adultes forts bien éduqués en mathématiques, seule une infime minorité pourra répondre aux questions de compréhension élémentaire suivantes :

Donnez un exemple pratique pour chaque égalité.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

b) $-2 \times -3 = +6$

c) 1 \$ ÷ ½ = 2 \$

Combien d'heures d'exercices répétitifs faut-il pour expliquer comment une multiplication de fractions (cas a) peut, dans une application quotidienne, générer un résultat (½) plus petit que chacun des facteurs utilisés (⅔ et ¾)? Combien de pages d'exercices aideront à visualiser la fameuse loi du « moins par un moins » (cas b) dans un cas concret? Combien de culbutes et de pirouettes opératoires faut-il exécuter pour se convaincre qu'une division peut doubler le dividende (1 \$), quand le diviseur est la fraction ½ (cas c)? Pourtant, des années d'entraînement quasi militaire à l'algèbre devraient nous avoir convaincus de la justesse universelle de la formule $x \div \frac{1}{2} = 2x$, peu importe la valeur de x… dollars ou pas! Croire qu'il est possible de rééduquer par l'exercice répétitif est un mythe perpétuellement contredit par le nombre effarant d'adultes intelligents et scolarisés qui avouent n'avoir pratiquement rien compris, en mathématiques. L'exercice renforce un comportement pour le rendre automatique et involontaire. La compréhension est un processus volontaire qui n'a rien d'automatique.

Légende 4 : L'urgence de ralentir

La rééducation devrait ralentir la cadence supposément trop rapide, pour l'élève en difficulté.

Le mythe qui pousse à ralentir est également à l'origine de la pseudo évidence qu'il faudrait davantage morceler la séquence d'apprentissage. Admis depuis des décennies, ces préceptes d'apparence logique ont causé en mathématiques un étirement et un morcellement déconcertants des contenus, dont les effets pervers semblent désormais admis comme normaux. Par exemple :

- Au premier cycle du **primaire**, les élèves doivent résoudre 3 + ☐ = 7.
- Au premier cycle du **secondaire**, les élèves doivent résoudre $3 + x = 7$.

Pourtant, ces deux formes propositionnelles ne comportent aucune différence conceptuelle importante. Ainsi, après près d'un siècle de programmes scolaires en mathématiques, on propose toujours un décalage d'au moins six années scolaires entre ces deux notions hautement analogues!

En 3^{e} année du primaire, pratiquement tous les élèves savent effectuer l'addition du cas a, ci-dessous. Mais, il leur faudra trimer dur pendant encore trois ans avant de rencontrer l'incroyable défi du cas b…

a) 345 + 567	b) 345 345 + 567 567

Imaginez un prof intrépide, presque hérétique, qui oserait défier ses élèves de 9 ans en allongeant subversivement les nombres à additionner et en oubliant toute tentative d'explication supplémentaire autre que : « *Si ça marche avec 3 chiffres, pourquoi pas avec 6?* ». Si l'aventure ne vous effraie pas, attendez-vous cependant à une étonnante tournure des événements. En effet, après à peine un ou deux cas, vos élèves s'emballeront et exigeront encore plus d'étirement positionnel… Ce grand saut dans le vide vous obligera bientôt à plonger le nez dans Internet pour trouver le nom des nombres à 20 chiffres ou plus, afin de satisfaire la curiosité du groupe, curiosité souvent inexprimée dans les classes du troisième cycle arrivées au million avec une lenteur tortueuse et tristement sclérosante.

De la manière dont certaines séquences des programmes de mathématiques ont été morcelées et étirées dans le temps, il devient quasi impossible pour les élèves de procéder à de fécondes généralisations. Un simple resserrement par cohérence favoriserait une plus grande compréhension de tous les élèves, tout en libérant une étonnante quantité de temps d'enseignement. D'évidence, il est urgent d'accélérer certaines séquences d'apprentissage devenues tout simplement soporifiques!

Légende 5 : Du simple au… complexé

Ce serait une loi universelle : l'enfant apprend les maths du simple au complexe.

Le premier agacement avec certaines lois universelles pédagogiques, c'est qu'elles ne fonctionnent à peu près jamais quand on en a besoin. Essayez d'apprendre à marcher à un bambin en procédant du simple au complexe : d'abord s'exercer à se tenir debout, ensuite se pratiquer à avancer le pied gauche, puis… Ouch! De toute façon, bébé ne voudra pas de cette façon d'apprendre. Pas plus quand il jouera avec son premier casse-tête : d'abord, grouper les bords, puis associer les couleurs, ensuite raccrocher les pièces qui ont des portions d'image en commun… Ouf! L'intérêt n'y sera pas et l'enfant refuserait probablement l'évidence de la loi du simple au complexe. On préférera lui montrer l'image du dessus de la boîte et dire qu'elle a été brisée en petits morceaux. Complexe, mais clair!

Le deuxième agacement avec certaines lois universelles pédagogiques, c'est de voir les enfants les appliquer à l'envers, avec succès! Prenez une classe d'élèves en difficulté, montrez-leur un téléphone cellulaire nouveau genre, une caméra vidéo sophistiquée et un ordinateur super performant accompagné d'un nouveau jeu vidéo archi compliqué. Dites simplement : « *J'aimerais pouvoir programmer mon nouveau téléphone, y mettre tous mes numéros en mémoire, télécharger une nouvelle sonnerie sur le Web et envoyer un message texte à ma cousine, qui vit en Australie. J'aimerais aussi lui envoyer un vidéo-clip musical dont vous serez les concepteurs, les scénaristes, les acteurs et les techniciens. Si tout va bien, je vous laisserai vous amuser au jeu vidéo qui accompagne mon nouvel ordinateur, qui est tellement compliqué que je n'arrive même pas à le brancher…* » N'oubliez pas de mentionner (même si c'est un pieux mensonge) votre totale inculture technologique, sans cacher votre légendaire étourderie qui vous fait égarer les manuels d'instruction, à tout coup! On conviendra facilement qu'il s'agit bien ici de résoudre des problèmes en commençant par le complexe, non? La classe va bourdonner. Stimulés par le défi que représente chacun de ces tours de force, la plupart des élèves vont apprendre. Après un mois, tout sera devenu beaucoup plus simple. Les automatismes auront fait place aux longues réflexions et aux essais infructueux suivis de succès motivants. Un vocabulaire de plus en plus précis aura remplacé les « machins » et les « choses » d'abord abusivement utilisés. Le chaos aura lentement fait place à la lumière et à la simplicité.

Des recherches vieilles de deux ou trois décennies ont démontré que le cerveau fonctionnait naturellement en procédant du complexe vers le simple. Au début des années '80, une expérience fascinante faisait la preuve de cette progression chez de jeunes hommes en train d'apprendre le jeu vidéo *Tetris*. Le verdict était alors tombé, sans appel : l'intelligence est l'extraordinaire faculté humaine qui permet de s'attaquer à une situation problématique complexe en mettant en action des procédés qui vont progressivement organiser et simplifier le problème au point d'en maîtriser toutes les facettes en déployant un minimum d'effort.

Organiser un apprentissage du simple au complexe place souvent l'élève devant la douloureuse obligation de faire fonctionner son cerveau à l'envers. La natation et les mathématiques ont en commun qu'on les apprend mieux en commençant par l'extrémité la plus profonde du problème…

Section 2 : S'asseoir dans le cerveau de l'élève

Aux premiers contacts avec l'élève en difficulté, l'orthopédagogue devrait poursuivre un premier objectif capital : saisir les perceptions de l'élève devant une tâche mathématique, c'est-à-dire cerner ses mécanismes déficients et s'insérer dans sa pensée jusqu'au point idéal de s'approprier ses erreurs et ses points de vue. En peu de mots, l'orthopédagogue cherche à s'asseoir dans le cerveau de l'élève pour mieux pouvoir brancher le plan de rééducation sur le réel de l'élève.

Dans le domaine de la rééducation en mathématiques, une tendance très répandue pousse à l'étiquetage des élèves en difficulté : troubles neurologiques mineurs, déficit de l'attention, dyscalculie, etc. Dans la mesure où l'information disponible dépasse le simple étiquetage, on devrait cependant toujours chercher à dresser un portrait précisant le style d'apprentissage de l'élève, ses forces et ses faiblesses, sans spéculer sur son incapacité d'apprendre. Tous les enfants peuvent apprendre et le fardeau de la preuve devrait toujours reposer sur les épaules des adultes qui leur enseignent. L'étiquetage n'est pas une conclusion diagnostique. Au mieux, c'est un critère à considérer, au pire, c'est préjudiciable et contreproductif. Pour s'en convaincre, il faut relire *Pygmalion à l'école : l'attente du maître et le développement intellectuel des élèves*[1], un passionnant compte rendu de recherche universitaire qui a démontré l'impact de l'étiquetage de l'intelligence des élèves sur les perceptions des enseignants et sur les résultats des élèves qui en découlent. Sans nier l'existence de perturbations neurologiques ou physiologiques ni leur impact possiblement majeur sur les capacités d'apprendre des élèves, il faut donc rapidement dépasser le stade de l'étiquetage pour passer en mode action : « *Que puis-je faire pour améliorer les choses?* » À cette fin, la démarche permettant d'établir un diagnostic pédagogique efficace en mathématiques doit comporter les trois phases suivantes :

1) Établir les stratégies ou les processus fondamentaux d'apprentissage qui sont déficients chez l'élève en mathématiques, le cas échéant. C'est l'analyse d'erreurs.
2) Situer l'élève par rapport à ce qui est normalement attendu à son âge. C'est l'évaluation des étapes incontournables.
3) Mettre en application un plan de rééducation efficace.

La mise en place de cette philosophie du diagnostic pédagogique commence donc par le besoin de s'asseoir dans le cerveau de l'élève, ce qui devrait être une recherche obsessive afin de voir le monde à sa façon. En phase initiale de cette démarche orthopédagogique, c'est donc l'élève qui enseigne sa perception des tâches mathématiques, sa logique et sa façon de résoudre des problèmes. Les erreurs de l'élève sont le miroir de sa pensée. Toute tentative de correction immédiate des erreurs de l'élève est absolument inappropriée au moment d'établir le diagnostic. La deuxième phase permet d'établir l'ampleur du rattrapage nécessaire. Pour aider l'orthopédagogue, la Section 3 du présent document propose un guide diagnostique élaboré depuis trois décennies et peaufiné sur le terrain, auprès de plusieurs centaines d'élèves en difficultés. Finalement, l'application du plan de rééducation doit viser des apprentissages véritables et non seulement des automatismes stériles. Un plan efficace de rééducation le sera d'autant qu'il s'éloigne des mythes évoqués à la Section 1. La Section 3 propose aussi de nombreuses activités éprouvées visant à stimuler les apprentissages incontournables du nombre, en lien avec le site Internet des *Expertises didactiques Lyons inc.*

Compétences et processus cérébraux

D'entrée de jeu, nous devons formuler une importante clarification à propos des compétences mathématiques. La résolution de problèmes est une *métacompétence*, en ce sens qu'elle n'est pas strictement de nature mathématique. La résolution de problèmes ne doit absolument pas être considérée comme une compétence strictement disciplinaire, mais plutôt comme l'essentiel environnement de toutes les compétences disciplinaires de cette matière et donc de l'approche didactique globalement préconisée pour l'enseigner. Quant aux compétences disciplinaires, nous proposons de les définir à partir des processus cérébraux clairement sollicités par la résolution de problèmes en mathématiques. Ainsi, en situation de résolution de problème, nous faisons appel à quatre processus cérébraux aisément discernables : la compréhension, le raisonnement, l'efficacité technique et l'efficacité de communication. Pour chaque processus, nous fournissons ci-dessous une erreur typique qui témoigne d'une difficulté rencontrée dans l'application de ce processus. Nous tentons aussi de dégager les principales caractéristiques de ces compétences cérébrales.

[1] Par Robert Rosenthal, Lenore Jacobson, Éditions Casterman, 1973 (293 pages). Voir aussi cet excellent résumé en ligne **http://tinyurl.com/effet-pygmalion**.

1) **La compréhension ou la capacité d'établir des liens analogiques**

La compréhension est le processus cérébral qui permet de faire des liens entre la réalité et diverses manifestations d'un concept mathématique (voir les cas a et b, ci-dessous). La compréhension est basée sur des **images mentales** générées par **analogie**. Les images mentales numériques les plus élémentaires servent à faire semblant, à faire comme si… Par sa compréhension, l'élève sait par exemple reconnaître la présence de la multiplication s'il faut compter les pattes de 5 chats et 3 poules. Réciproquement, il lui est possible de donner un exemple ou d'illustrer une expression symbolique de multiplication (voir le cas c, ci-dessous). La question par excellence pour solliciter la compréhension est : ***Quel est le lien avec la réalité?***

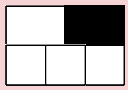
Voici les réponses très fréquemment obtenues par des élèves au début du secondaire, à des questions posées lors d'un test ordinaire. Toutes révèlent des **difficultés de compréhension.**

a) À 1 heure, la corde à danser de Josée mesure 2 m.
Quelle sera la longueur de cette corde à 3 heures?
R. : 2 m x 3 = 6 m La corde mesure 6 mètres

b) Dans ta poche, il y a 4 pièces de monnaie.
Ensemble, ces pièces valent 12 ¢.
Que vaut chacune des pièces qui se trouvent dans ta poche?
R. : 4 x 3 = 12 4 pièces de 3 ¢

c) Invente un problème qui va bien avec cette égalité : $2 \times 5 = 10$
R. : Dans un sac il y a 2 pommes et dans un autre il y en a 5.
Multipliez-les.

d) Quelle fraction représente la partie noircie de ce rectangle?
R. : $\frac{1}{5}$



Si l'élève affiche des lacunes au niveau de la compréhension des mathématiques, il faudra d'abord s'assurer de lui offrir l'opportunité de la reconstruire. Si la difficulté persiste en dépit de l'opportunité d'apprendre, il faut tout de même maintenir cette priorité de rééducation de la compréhension plutôt que de céder rapidement à la facilité de se limiter à l'efficacité technique.

2) **Le raisonnement ou la capacité d'établir des liens logiques**

Le raisonnement est la faculté de combiner une suite de propositions déduites les unes des autres et correctement enchaînées pour mener à une conclusion objective. Raisonner permet d'identifier des régularités, des lois et toute règle permettant d'ordonner, de structurer ou de rationaliser une situation. Le raisonnement est le processus cérébral qui permet à l'élève d'expliquer toutes les étapes de sa démarche ou de ses procédés techniques de façon claire et logique. La question par excellence pour solliciter le raisonnement est ***Pourquoi?***

L'enseignement d'automatismes précoces est le principal responsable des lacunes du raisonnement mathématique affiché par de nombreux élèves et, avouons-le, par plusieurs adultes également. Le dialogue ci-dessous, tiré d'un fait vécu, illustre le malaise profond d'un enseignement des mathématiques trop centré sur le comment et pas assez sur le pourquoi…

*Le prof : « Alex, tu as écrit $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ = **5/10**. Ne sais-tu pas additionner en utilisant le dénominateur commun?*

– *Oh! J'ai pris la méthode facile. Fallait prendre l'autre… »*

Alex corrige aussitôt son erreur et obtient finalement la fraction 5/5. Encore intrigué par son dernier commentaire, le prof lui demande : « *Cette technique d'addition est la seule que je connaisse! De quelle autre méthode « facile » voulais-tu donc parler?*

– *Celle des profs pour le calcul des notes : $\frac{2}{5}$ au premier numéro d'un test et $\frac{3}{5}$ au deuxième, ça fait **5/10** comme note totale. Si ça compte pour vrai, le prof ne voudra sûrement pas donner 5 sur 5…*

– *Alex, tu permets que je prenne la récré, pour digérer cette idée-là*? »

Si la réponse de l'élève à la question « *Pourquoi?* » est systématiquement du type : « *Parce qu'en mathématiques, c'est comme ça!* », il faudra de nouveau s'assurer que l'élève a véritablement eu le temps et l'opportunité de justifier les procédés techniques qu'il a peut-être appris par cœur, avec plus ou moins de bonheur. En priorisant la compréhension (faire des liens), le raisonnement (expliquer logiquement les étapes suivies) devient pertinent et beaucoup plus facile à stimuler. Chez la majorité des élèves en difficulté, établir les liens de compréhension demeure la partie la plus délicate de la démarche de résolution de problèmes. En revanche, leur capacité de raisonner est souvent correcte. Par contre, on constate que chez l'élève souffrant d'une déficience intellectuelle importante, la compréhension et le raisonnement sont souvent gravement affectés.

3) L'efficacité technique ou la rapidité d'exécution

De tous les processus cérébraux sollicités en mathématiques, l'efficacité technique est certainement celui qui demande le moins de présentation. L'élève manifeste son efficacité technique en mémorisant les tables, en exécutant efficacement les techniques pour chaque opération de base, en calcul écrit aussi bien qu'en calcul mental, ce qui inclut l'estimation. Ce processus cérébral favorise également le développement des habiletés qui permettent de manipuler efficacement les divers instruments de l'artillerie mathématique : règle, horloge, rapporteur, compas, grille cartésienne, calculette, chiffrier électronique, etc. La question par excellence pour solliciter l'efficacité technique est ***Comment faire efficacement?***

Les exemples qui suivent montrent des erreurs d'exécution technique fréquemment commises par les élèves du primaire. Les deux cas proposés pour chaque opération sont bien connus et il est facile de s'asseoir dans le cerveau des élèves pour saisir la démarche erronée commune. De plus, il sera tout aussi édifiant de demander à l'élève les raisons de ces façons de faire.

a) Effectue.	59	358
	$+\ \underline{6}$	$+\ \underline{25}$
	515	*3713*
b) Effectue.	63	307
	$-\ \underline{28}$	$-\ \underline{241}$
	45	*146*
c) Effectue.	22	32
	$\times\ \underline{13}$	$\times\ \underline{25}$
	26	*70*
d) Effectue.	$2424\ \lfloor\underline{\ 6\ }$	$609\ \lfloor\underline{\ 3\ }$
	44	*23*

Au cas a, l'élève note les résultats en colonnes, sans reporter les retenues. Les exercices répétés d'addition sans retenue entraînent souvent ce type de comportement quand arrivent les cas où il faut affronter des regroupements. Le cas b concerne l'erreur la plus fréquente parmi toutes celles qui ont été répertoriées en Occident. L'élève avoue souvent inverser les soustractions « impossibles » comme 3 – 8 pour obtenir 8 – 3. Certains y verront les manifestations d'un syndrome dyscalculique. Il serait peut-être plus avisé d'y voir une erreur dans la séquence des programmes et des manuels proposés au début du cours primaire. En effet, il est regrettable que les élèves n'aient pas plus tôt l'occasion de réfléchir à des cas de soustraction comme 3 – 8 pour mieux raisonner la situation de l'emprunt au cas 63 – 28. Est-ce si difficile de comprendre qu'il manque 5 unités et qu'il est possible de trouver d'autres unités à même une dizaine? Enseigner pendant 4 ou 5 ans que 3 – 8 est impossible conduit plusieurs élèves à concevoir une telle stratégie erronée. Ici encore, la volonté d'imposer trop tôt des automatismes, sans donner la place à la compréhension et au raisonnement, ne fait que nuire à l'apprentissage. Au cas c, plusieurs élèves expliquent leur procédé (unités × unités et dizaines × dizaines) par un transfert d'une règle similaire, pourtant valide : « *En addition, on ne mélange pas les carottes et les tomates… Et si la multiplication est une addition répétée…* » Encore une bonne matière à réflexion pour la récré!

Une approche de rééducation ouverte entraîne aussi l'orthopédagogue sur le chemin passionnant de la découverte du pourquoi des mathématiques (raisonnement) et de leur pertinence dans la résolution de problèmes tirés de la réalité (compréhension). De façon générale, l'apprentissage des procédés techniques devrait donc s'appuyer sur la compréhension et le raisonnement. Les élèves en difficulté d'apprentissage sont sans l'ombre d'un doute ceux qui sont les plus affectés par l'enseignement précoce d'automatismes gratuits et qui se retrouvent sans moyen d'y survivre. Rééduquer la compréhension et le raisonnement est une priorité inéluctable, si l'on veut donner à ces élèves une véritable chance de se revaloriser et de se dégager de leurs difficultés.

4) **La communication ou la précision sémantique et symbolique**

Les mathématiques comportent évidemment le recours à un langage rigoureux. L'élève doit également apprendre à interpréter correctement le symbolisme conventionnel et différentes phrases mathématiques que sont les égalités, les inégalités, les équations, etc. Le vocabulaire et le symbolisme peuvent donc devenir eux-mêmes des sources d'erreurs ou de difficulté. La question par excellence pour solliciter l'efficacité de communication est ***Quoi dire ou écrire?***

> Katya (7 ans) a complété les égalités suivantes :
>
> a) 9 – 3 = 9 b) 6 – 2 – 3 = 6 c) 4 + 1 – 3 = 5
>
> L'orthopédagogue demande à Katya d'expliquer sa réponse au cas c :
>
> « *Je place d'abord les jetons qui vont avec les nombres donnés :*
>
> ● ● ● ● ● ● ● ●
>
> *Ensuite, s'il y a "plus" entre deux nombres, je mets les jetons ensemble (elle le fait avec les lots de 1 et 4 jetons) : ça fait 5. S'il y a un "moins", j'enlève le nombre qui suit (les 3 jetons placés à droite sont enlevés). Il reste 5, c'est la réponse.* »

Lors de cet autre cas vécu, une question pertinente et judicieusement posée a permis à l'enseignante de Katya de s'asseoir dans le cerveau de son élève. Toute autre réaction visant à corriger rapidement l'erreur aurait été inappropriée, à ce stade du diagnostic pédagogique. Comme pour la plupart des difficultés rattachées au processus cérébral de communication, il a été très facile d'éliminer l'erreur de Katya, après avoir pris la peine de poser la bonne question.

L'orthopédagogue doit s'assurer d'éluder l'impact négatif du recours précoce ou abusif au vocabulaire et au symbolisme mathématique. La compréhension et le raisonnement doivent prioritairement être évalués, sans laisser interférer les difficultés qui ne seraient liées qu'au vocabulaire ou à l'interprétation du symbolisme.

Le tableau ci-dessous résume les principales composantes qui caractérisent les quatre processus cérébraux associés à la résolution de problèmes en mathématiques.

COMPRÉHENSION	RAISONNEMENT
L'enfant manifeste sa compréhension • En donnant des exemples; • En imitant le concept avec du matériel; • En jouant à faire comme si… Pour l'aider à comprendre • Utilisez la monnaie comme matériel; • Valorisez le recours au concret; • Détendez l'atmosphère.	L'enfant manifeste son raisonnement • En expliquant ses démarches; • En trouvant des régularités, des lois…; • En structurant sa démarche. Pour l'aider à raisonner • Inversez les rôles, l'enfant devient le prof; • Saisissez sa logique avant de livrer la vôtre; • Jouez des tours pour créer la contradiction.
Quel est le lien avec la réalité?	***Pourquoi?***

EFFICACITÉ DE COMMUNICATION	EFFICACITÉ TECHNIQUE
L'enfant manifeste son efficacité à communiquer • En utilisant le vocabulaire approprié; • En employant les symboles mathématiques; • En dessinant ou en notant sa démarche. Pour l'aider à communiquer • Valorisez le recours au mot juste; • Utilisez le vocabulaire de façon naturelle; • Consultez le dictionnaire en sa compagnie.	L'enfant manifeste son efficacité technique • En effectuant rapidement ses procédés; • En recourant au calcul efficace; • En mémorisant ses tables (3e année et +) Pour l'aider à être efficace • Donnez des problèmes d'application; • Lancez des défis « raisonnables »; • Encouragez toute amélioration.
Quoi dire ou écrire?	***Comment faire efficacement?***

Processus cérébraux en mathématiques : composantes et caractéristiques

Note importante : La **compréhension** utilise principalement les **aires visuelles et globales du cerveau,** siège de l'**analogie.** Pour sa part, le **raisonnement** est l'héritage des aptitudes cérébrales verboauditives et séquentielles, où loge le **langage.** Les processus d'efficacité s'expriment différemment selon chacune de ces deux grandes approches sensorielles. Nous nuancerons ces aspects dans la section qui suit (voir le tableau des étapes incontournables).

Section 3 : Les incontournables du nombre au primaire

Le présent document propose aux orthopédagogues et aux enseignants du primaire une séquence de référence validée concernant le développement du nombre et de la numération. On y proposer essentiellement des repères mesurables en vue d'établir rapidement un diagnostic fixant le niveau de retard accumulé par un élève en fonction des performances mathématiques qui sont normalement attendues des élèves du primaire. Chaque section présente une étape que l'élève doit absolument franchir dans son apprentissage du nombre et de la numération.

Comprenons-nous bien : à proprement parler, aucun apprentissage n'est incontournable si l'on admet qu'il est possible d'apprendre les mathématiques de façon brutale ou purement mécanique, sans espoir de les intégrer, sauf le temps qu'il faut pour passer un examen de fin d'année, comme cela a trop souvent été démontré. Les étapes que nous décrivons s'appuient plutôt sur la conviction que les élèves peuvent et doivent réaliser des apprentissages conscients et féconds qui permettent d'intégrer les mathématiques à leur développement harmonieux. Par *incontournable*, nous voulons tout simplement dire *conscient* et *transférable à la réalité*.

Le tableau de la page suivante décrit sommairement les étapes incontournables du nombre à partir des acquisitions des tout-petits, jusqu'à l'entrée au secondaire. Pour chaque étape incontournable rattachée à une année scolaire, il faut comprendre que l'élève aura quelques semaines, en début d'année, pour manifester sa capacité d'accomplir de façon autonome la tâche qui est décrite à la section *Scénario d'évaluation* ou toute autre tâche équivalente.

En guise d'exemple, au début de la 2^{e} année, l'élève doit absolument maîtriser le groupement ainsi que le concept de multiplication, tels que nous les définissons à l'étape 2. Dans le cas contraire, un retard important pourrait déjà être accumulé et l'élève doit vivre, au plus tôt, des activités de rattrapage avant d'entreprendre tout apprentissage plus avancé. La rubrique *Quoi faire pour aider?* propose des pistes d'activités en ce sens.

Si l'élève ne peut accomplir de façon autonome une tâche prévue pour l'année précédente, le retard accumulé devient alors majeur et l'élève ne peut absolument pas suivre les activités mathématiques normalement prévues à son niveau scolaire. Ainsi, à titre d'exemple, l'élève qui, au début de la 4e année, n'a toujours pas maîtrisé la numération de forme et l'équivalence (voir l'étape 3, normalement attendue en début de 3^{e} année) doit, sans attendre, faire l'objet d'un plan d'intervention personnalisé tenant compte du retard accumulé et s'appuyant sur la dernière étape incontournable maîtrisée.

Il était une fois…

La séquence d'apprentissages incontournables proposée dans le présent document est résolument parallèle à l'histoire qui a conduit l'humanité à la maîtrise du nombre et du calcul. À chaque étape, nous présentons la rubrique *Il était une fois...* qui rappelle son pendant historique. Faut-il s'étonner que les étapes systématiquement traversées par nos lointains ancêtres pour s'approprier l'arithmétique élémentaire soient également celles par lesquelles l'enfant doive à son tour apprendre le même sujet?

Historiquement et en peu de mots, nous pourrions dire que le développement du nombre repose clairement en premier lieu sur les aptitudes analogiques et logiques du cerveau, bien avant d'avoir atteint l'efficacité technique et la notation symbolique moderne. Ainsi, depuis au moins 50 000 ans, la pensée numérique humaine a évolué grâce à notre capacité de faire comme si... avec des doigts, des cailloux et des encoches, supportée par notre aptitude à rendre nos procédés de plus en plus rationnels et efficaces. Dans ce cheminement, le boulier constitue l'aboutissement ultime de la représentation des nombres au moyen de cailloux; le calcul écrit constitue pour sa part le dernier stade du recours aux encoches sur des os! Comme dans l'histoire de la musique, un domaine beaucoup plus proche des mathématiques que la lecture, ce n'est que tardivement – et à la même époque, à la fin du Moyen-Âge – qu'est apparu le besoin d'une notation efficace permettant de véhiculer clairement les idées.

Étapes incontournables des acquisitions du nombre au primaire

ÉTAPE/CONCEPTS-CLÉS	DESCRIPTION!			
ÉTAPE A ***Subitisation* et sens des petites numérosités** [Avant 4 ans] **Proto-arithmétique**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Subitisation perceptuelle (visuelle)*** PERTINENCE : Apprentissage du nombre fondé sur une aptitude à mémoriser instantanément de petites numérosités perçues visuellement (≤3). Sens des petites numérosités appliqué à des objets ou images. Recours à la version visuelle de la *subitisation perceptuelle.*	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Subitisation perceptuelle (auditive)*** PERTINENCE : Apprentissage du nombre fondé sur une aptitude à mémoriser instantanément une suite de quelques sons (≤3). Sens des petites numérosités appliqué à des séquences de sons. Recours à la version auditive de la *subitisation perceptuelle*.
ÉTAPE B ***Comptage* et nombre flou** [Avant 6 ans] **Arithmétique de comptage**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Comptage global*** PERTINENCE : Dépassement des limites quantitatives de la subitisation perceptuelle (>3). *Comptage global* ou *visuel* fondé sur la superposition d'images mentales appelées *constellations*. Recours à la *subitisation structurelle.*	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Comptage séquentiel*** PERTINENCE : Difficulté d'accéder globalement aux éléments à mémoriser ou de les agencer. *Comptage séquentiel* fondé sur l'*énumération.* Recours à la chaîne numérique verbale *insécable* et au comptage sur les doigts.
ÉTAPE 1 ***Analogie numérique et* nombre abstrait** [Avant 7 ans] **Arithmétique conventionnelle avec ordre et addition**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Analogie numérique*** PERTINENCE : Absence d'accès sensoriel aux divers éléments à mémoriser. L'*analogie numérique* permet de se représenter une collection évoquée abstraitement. Processus fondé sur l'*image mentale* et la capacité de *faire comme si…* au moyen d'un *matériel de substitution* (doigts, jetons, marques, etc.).	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Nombre abstrait*** PERTINENCE : Le langage, la pensée logique et la symbolisation permettent un support performant de mémorisation et de traitement des nombres. Acquisition de la pensée opératoire : concept piagétien de nombre abstrait, principes du dénombrement, opération formelle d'addition/soustraction, chaînes terminale et bidirectionnelle
ÉTAPE 2 ***Groupement* récurrent et multiplication** [Début 2e année] **Arithmétique conventionnelle avec multiplication**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE : *Groupement visuel récurrent*** PERTINENCE : Recours au groupement « pour mieux voir » et mieux mémoriser une collection comptant plusieurs dizaines d'éléments. Le *groupement visuel* est une récupération stratégique de la *subitisation structurelle* appliquée à des numérosités de plus en plus imposantes. Manipulation adéquate d'un *matériel structuré d'énumération* (unités déjà visuellement disposées, en dizaines ou en centaines).	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE–TYPE : Expressions multiplicatives** PERTINENCE : Les expressions multiplicatives facilitent la mémorisation d'une plus grande quantité d'éléments. Capacité de mémoriser ou de représenter des quantités exprimées verbalement ou à l'écrit au moyen de plusieurs types de groupement : 5 paquets de 6, 5 x 6, 4 semaines et 2 jours, 7-卌 (expression mixte pour 7 groupes de 5), 5 unités et 4 dizaines… Maîtrise du dénombrement par *chaînes groupées***.**

ÉTAPE/CONCEPTS-CLÉS	DESCRIPTION			
ÉTAPE 3 ***Équivalence*** **et multiples représentations** [Début 3e année] **Numération de forme**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Équivalence (de formes)*** PERTINENCE : Même visuellement bien disposés, de très grands ensembles deviennent trop lourds à mémoriser, surtout s'il faut faire des calculs! Passage de l'*énumération* à la *numération* : formes ou signes distincts représentent des unités d'ordres différents; les blocs de base dix sont utilisés comme matériel de substitution. La *numération de forme* permet de subitiser des quantités de plus en plus imposantes.	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Multiples représentations*** PERTINENCE : Vu le recours à des unités d'ordres différents, il existe plusieurs représentations d'un même nombre. Certaines situations peuvent imposer des *échanges*. Habileté à composer ou décomposer des nombres exprimés en termes de groupements, à l'écrit ou verbalement. Exemple : 3 centaines + 14 dizaines – 5 unités = ___
ÉTAPE 4 ***Meilleure représentation*** **et symbolisation dynamique** [Début 4e année] **Calcul concret**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Meilleure représentation*** PERTINENCE : En situation de calcul concret, certaines difficultés sont surmontées en modifiant la représentation d'un nombre. Concrétisation des principes opératoires sur la planche à calcul : • *Addition* et *multiplication,* trouver la représentation la plus *économique*; • *Soustraction* et *division* : trouver la décomposition qui permet d'opérer sans contrainte. Le *calcul concret* facilite la *visualisation* des principes opératoires.	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Symbolisation dynamique*** PERTINENCE : Noter les étapes d'un calcul concret permet d'en garder la trace et facilite la vérification. La symbolisation dynamique permet de noter les manipulations de la planche à calcul afin de rendre compte de la démarche suivie. Le *calcul écrit* exprime le calcul concret et visuel dans un mode *séquentiel* et plus facile à *codifier*.
ÉTAPE 5 ***Calcul mental*** **et calcul écrit** [Début 5e année] **Calcul efficace**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Calcul mental*** PERTINENCE : Quand le calcul devient un métier, une science et un art, les procédés techniques deviennent plus efficaces et… plus élégants. Le *calcul mental* est hérité du calcul concret et il se modèle sur les procédés employés sur l'*abaque évolué.* Les procédés du *calcul mental* sollicitent principalement les *aires visuelles* du cerveau.	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Calcul écrit*** PERTINENCE : Le calcul écrit a régné sans opposition sur les mathématiques élémentaires depuis l'invention de l'école. Désormais, la technologie moderne impose un nouveau *rôle scolaire* au calcul écrit : *soutenir et favoriser le calcul mental.* Les procédés du calcul écrit sollicitent principalement les aires verboauditives du cerveau.
ÉTAPE 6 ***Généralisation*** **et préalgèbre** [Début du secondaire] **Arithmétique dans ℝ**	**GLOBAL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Généralisation*** ***Généralisation*** des acquisitions du calcul à toutes les tranches entières, aux positions décimales et aux fractions ordinaires, soit à l'ensemble ℝ des nombres réels.	**SÉQUENTIEL**	**STRATÉGIE-TYPE :** ***Préalgèbre*** Les lois et les principes généralisés de l'arithmétique forment une ***préalgèbre.***

Étape A : Subitisation et sens des petites numérosités

Au moment d'élaborer un diagnostic ou un plan de rééducation du nombre, il est essentiel et stimulant de ne plus considérer l'acquisition du concept piagétien de nombre comme un incontournable point de départ. En effet, des recherches récentes prouvent qu'il existe un sens primitif, mais dynamique des nombres chez les tout-petits. Voici des exemples d'expériences menées auprès de nourrissons et qui permettent à de nombreux chercheurs en neurosciences de conclure en l'innéité d'un certain sens des nombres :

- Une figurine est montrée au bébé, puis cachée derrière un écran. Une deuxième y est glissée au vu et au su du nourrisson. Quand l'écran est abaissé, bébé est **étonné**[2] d'en retrouver trois ou seulement une[3] (**subitisation visuelle,** dès l'âge de 5 mois);
- Quand trois coups de tambour successifs sont entendus, bébé se tourne préférablement vers une image affichant trois ronds plutôt que vers celles qui en montrent seulement un ou deux[4] (**subitisation auditive,** dès l'âge de 6 mois).

La **subitisation**[5] est définie comme une capacité d'appréhension quasi instantanée qui permet d'établir le nombre d'éléments d'un ensemble qui en contient 1, 2 ou 3.[6] Cette aptitude sensorielle s'applique aussi bien à des situations visuelles qu'auditives. De vigoureux débats opposent les théoriciens pour savoir si la subitisation est innée ou acquise et si elle constitue un « véritable » sens des nombres. En revanche, pratiquement tous s'accordent pour convenir qu'elle est bel et bien installée chez les enfants, vers dix-huit mois, et qu'elle constitue alors une base intuitive et solide pour le développement du nombre.

Pour bien souligner la nature primitive de la perception numérique des nourrissons, les neuroscientifiques ont inventé l'expression **sens des petites numérosités.** Le terme *numérosité* est synonyme de *nombre,* ce dernier véhiculant cependant un sens plus abstrait. Le mot *numérosité* est un proche synonyme du terme ensembliste *cardinalité* et il constitue la réponse intuitive à la question *Combien?* Bien que l'hypothèse soit encore à démontrer, il semble de plus en plus admis que le sens des petites numérosités formerait déjà une **proto-arithmétique,** c'est-à-dire une prédisposition à concevoir l'arithmétique abstraite. Avant l'acquisition du concept piagétien de nombre, vers l'âge de 7 ans, le sens des numérosités des tout-petits s'exercerait donc d'abord par subitisation, **sans faire appel au langage, au symbolisme ou au comptage un à un.** Cette prédisposition à l'arithmétique serait le pendant numérique des modules de la faculté linguistique évoqués par le linguiste Noam Chomsky, pour qui l'extrême facilité des enfants à apprendre à parler suppose une « *capacité innée pour apprendre des langues.* »[7]

Quelle est la pertinence des acquisitions de l'Étape A? La **subitisation perceptuelle**[8] étant une stratégie extrêmement précoce, sa maîtrise représente un point de départ bien plus élémentaire que le concept piagétien de nombre abstrait. Les performances incontournables attendues à l'Étape A sont généralement réalistes pour l'enfant de 4 ans.

---

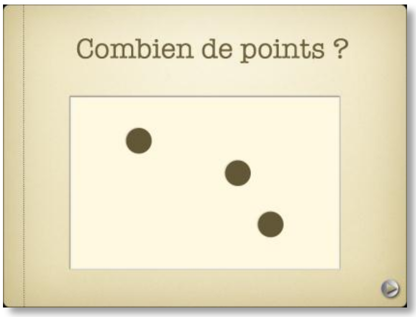
[2] La mesure objective de cet étonnement est établie par l'allongement significatif du temps d'attention visuel qui est précisément chronométré dans ce type de recherche.
[3] Expérience phare menée par Karen Wynn (voir *Le sens des nombres*, Les dossiers de La Recherche n° 34, février 2009 ou en ligne **http://tinyurl.com/sens-des-nombres**).
[4] En ligne, consulter **http://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_du_nombre_chez_l'enfant** pour un résumé de l'état actuel de la réflexion.
[5] En anglais, *subitizing.* Aussi désignée par l'expression *reconnaissance globale.*
[6] Notre expérimentation sur un groupe d'une vingtaine d'enfants du préscolaire, en juin, montre que la perception instantanée de 4 éléments n'est réussie que par 60 % des élèves, tandis que les résultats pour 1 à 3 objets si situaient tout près de 100 %. Des résultats similaires ont été obtenus dans diverses recherches, auprès d'enfants encore plus jeunes.
[7] À lire dans **http://fr.wikipedia.org/wiki/Noam_Chomsky**
[8] Dans cet article **http://tinyurl.com/subitisation** publié en mars 1999 Douglas H. Clements définit deux formes de subitisation. La plus précoce dont il est ici question est dite *perceptuelle*, tandis que la subitisation *structurelle* (ou *conceptuelle*) suppose le recours aux constellations, sujet que nous aborderons à l'Étape B.

Épreuve d'évaluation préliminaire

Plusieurs recherches en neurosciences[9] tendent à démontrer que l'enfant qui ne sait pas subitiser ne parviendra jamais à maîtriser le calcul, même le plus élémentaire. Cependant, l'expérience montre qu'il est extrêmement rare de rencontrer des élèves scolarisés, même en grande difficulté, qui soient incapables de subitiser. Une épreuve préliminaire de subitisation est fournie ci-dessous pour vous permettre de vérifier cet aspect, au besoin.

Matériel requis

- Vidéo : Epreuve_SubitisationVisuelle.mov;
- Vidéo : Epreuve_SubitisationAuditive.mov.



Présentation de l'épreuve préliminaire

Partie 1 : Subitisation perceptuelle (visuelle)

La vidéo présente 15 cadres contenant de 1 à 4 points (exemple ci-contre, avec 3), chacun pendant un peu moins d'une demi-seconde. C'est le temps suffisant pour subitiser, c'est-à-dire pour mémoriser le nombre exact de points.

Consignes à l'élève : « *Des points vont apparaître à l'écran. Il te faudra être sur tes gardes, car l'image va disparaître presque aussitôt! Combien de points as-tu vus?* »

Le premier cas sert d'exemple. Les cas présentant 3 points ou moins devraient être parfaitement réussis. Les exemples à 4 points servent à montrer la limite de la subitisation visuelle et pourraient être réussis une fois sur deux, sans trop inquiéter.

Partie 2 : Subitisation perceptuelle (auditive)

L'épreuve de subitisation auditive est similaire à celle de subitisation visuelle, sauf qu'elle exige de prêter attention à des suites de 1 à 4 sons.

Consignes à l'élève : « *Tu vas entendre des coups de tambour. Il te faudra être bien à l'écoute! Combien de coups as-tu entendus?* »

Le premier cas sert d'exemple. Le critère de maîtrise (réussite de tous les cas) s'applique uniquement aux situations présentant 3 coups de tambour ou moins. Ici encore, on pourra constater l'atteinte d'une certaine limite lorsque 4 coups de tambour sont entendus.

L'élève qui, **de façon non équivoque et répétée,** éprouve des difficultés importantes à réussir l'une ou l'autre de ces deux épreuves devrait être le plus tôt possible référé à un spécialiste des troubles sensoriels ou neurologiques afin d'identifier les causes physiologiques probables de ces lacunes qui pourraient s'avérer handicapantes.

[9] *La bosse des maths – Quinze ans après*, Stanislas Dehaene, Édition Odile Jacob, Poches, 2010 (384 pages) : Un ouvrage inspirant, que nous recommandons avec enthousiasme.

Scénario d'évaluation : Étape A

Manifestations concrètes de notre aptitude à subitiser

Matériel requis

- Vidéos et documents (voir ci-dessous).

Présentation de la tâche

Chacune des vidéos évalue une facette essentielle de la subitisation et du sens des petites numérosités. Voir le protocole de l'entrevue pour la description du déroulement.

Partie 1. Subitisation perceptuelle
Des coccinelles apparaissent à la fenêtre.
Quelle photo a été prise à ce moment?

Partie 2. Addition/soustraction
Un store est tiré et cache quelques coccinelles qui vont et viennent.
Que verra-t-on en relevant de nouveau le store?

Partie 3. Égalité **Attention! Voir le protocole pour l'organisation matérielle.**
À la collation, les coccinelles mangent chacune un puceron.
Assurons-nous de ne pas faire de chicane…

Partie 4. Comparaison
Les coccinelles rouges aiment danser avec les jaunes.
Auront-elles toutes une partenaire?

L'élève qui maîtrise la présente étape peut **mémoriser** de petits ensembles, les **comparer** et les **additionner** ou les **soustraire**, de façon instantanée et sans recours au langage, au symbolisme ou au comptage, **à l'intérieur des limites de la subitisation perceptuelle.**

Il était une fois : la subitisation

L'Histoire n'a évidemment gardé aucune trace des premiers pas de l'humanité en matière de subitisation. Plusieurs chercheurs considèrent d'ailleurs cette aptitude comme un très lointain héritage évolutif que nous retrouverions chez plusieurs animaux, dont le singe, le rat et même le pigeon![10] Il existe cependant d'innombrables manifestations modernes ou ancestrales de notre aptitude à saisir jusqu'à trois ou quatre éléments d'un seul coup d'œil (voir l'illustration ci-dessus) : chiffres romains, séparation des chiffres d'un numéro de téléphone, sur les cartes de crédit, groupements sur les plaques minéralogiques, etc. Le nombre de lettres ou de signes constituant une syllabe dans pratiquement toutes les langues écrites serait également lié à notre aptitude à considérer de petits ensembles *subitisables*.

L'histoire des nombres profondément marquée par notre aptitude à mémoriser aisément 3 éléments disparates. Ainsi, des numérations adoptées par des civilisations aussi éloignées que différentes montrent des alignements de 1 à 3 traits parallèles pour représenter les nombres 1, 2 et 3. C'était le cas notamment en Mésopotamie, en Égypte, en Chine, en Inde et en Amérique précolombienne. Certains ont choisi un nouveau symbole ou un regroupement visuel à 4, d'autres à 5. L'histoire des chiffres romains illustre bien ce phénomène avec l'ancien quatre composé uniquement de traits verticaux (IIII) qui a plus tard cédé la place au chiffre actuel (IV).

١ ٢ ٣

Nos chiffres modernes camouflent à peine leur origine étroitement liée à la subitisation. Une graphie arabe d'origine de nos chiffres 1, 2 et 3 (voir ci-contre) consistait à tracer pour chacun autant de traits liés entre eux, en mode d'écriture cursive. En faisant pivoter ces symboles d'un quart de tour à gauche, on retrouve l'origine des tracés modernes.

[10] Ibid, Chapitre premier, pages 17 à 54.

Quoi faire pour aider?

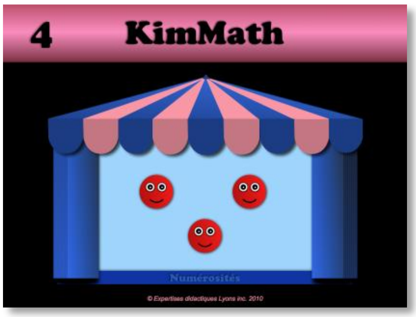
Les suggestions d'activités qui suivent **permettent de s'assurer que l'élève possède les acquisitions essentielles de l'Étape A**[11]. Toutes les vidéos mettent en scène les Subitos, petit peuple aux allures de jetons ronds, dans des séquences de problèmes de difficulté croissante. Les numérosités à considérer ne dépassant généralement pas 4, il est possible de résoudre chaque situation mentalement. Toutefois, **le recours aux jetons demeure un support possible et à encourager** si l'élève éprouve des difficultés inhabituelles de mémorisation. Pour des jetons adaptés aux activités, voir Jetons-Subitos.

Note importante : Dans toutes les activités qui suivent, surtout si elles sont vécues avec de très jeunes enfants, évitez le plus possible les questions suivantes, qui tendent à évoquer un **nombre abstrait** : *Combien y en a-t-il? Quel nombre manque-t-il? Y en avait-il plus ou moins?* etc. Les tout-petits perçoivent souvent un **nombre flou**, passablement plus intuitif qu'à l'Étape 1. Les questions plus abstraites détournent généralement les jeunes enfants du sens plus concret de la tâche. Consultez le tableau décrivant les acquisitions de la chaîne numérique verbale pour mieux saisir les différents sens qui sont attribués par l'enfant à la question *Combien?* tout au long de ses apprentissages. Lire aussi *La question qui tue!*

Activité 1 : KimMath

Matériel requis

- Vidéo ÉtapeA_KimMath_Animaux.mov;
- Vidéo ÉtapeA_KimMath_Numérosité.mov;
- Documents d'accompagnement.

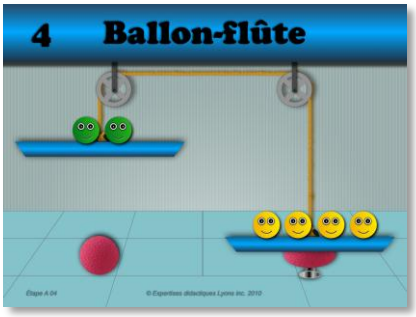


La vidéo KimMath_Animaux présente une version du jeu de Kim qui sert de préparation à l'activité. De 3 à 5 animaux différents occupent la scène avant que les rideaux se ferment. Quand ils s'ouvrent à nouveau, l'enfant doit identifier l'animal ou les animaux qui sont disparus. Aucune habileté numérique à proprement parler n'est requise ici, car seule la capacité de mémorisation des éléments individuels est requise. Nous suggérons de jouer d'abord au jeu de Kim avec de véritables objets.

Par contre, quand les Subitos s'invitent au jeu de KimMath, la situation change du tout au tout! Puisqu'ils sont tous parfaitement identiques, c'est uniquement la **numérosité** qui peut être mémorisée. Dans l'activité KimMath_Numérosité, il faut comparer un groupe de Subitos à lui-même; aucune correspondance terme à terme visuelle n'est possible.

Attention! La question à poser est : « Y en a-t-il qui sont cachés derrière les rideaux? »

Activité 2 : Ballon-flûte



Matériel requis

- Vidéo ÉtapeA_Ballon-flûte.mov;
- Documents d'accompagnement.

La vidéo présente deux équipes de Subitos qui vont sauter simultanément sur les plateaux d'une balance. Dans chacune des situations de difficulté croissante qui sont proposées, l'élève doit donc comparer deux ensembles différents, mais simultanément présents.

N'oubliez pas de hausser le volume de vos haut-parleurs!

Attention! La question à poser est : « Quelle équipe fera crier le ballon? »

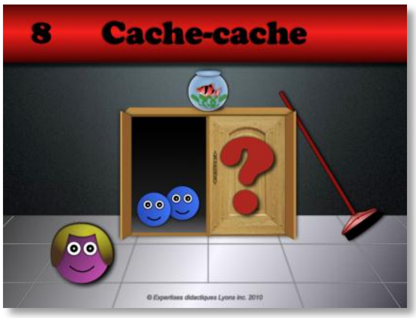
---

[11] La plupart des activités suggérées sont davantage orientées vers l'aspect *visuel* de la subitisation. D'autres travaux sont en développement pour stimuler également la dimension *auditive*.

Activité 3 : Cache-cache

Matériel requis

- Vidéo EtapeA_Cache-cache.mov;
- Documents d'accompagnement.



La vidéo montre quelques Subitos qui se sauvent et se cachent dans un placard, à l'heure du dodo. Quand maman arrive et ouvre la première porte, elle en débusque parfois quelques-uns. Avant d'ouvrir la seconde porte, l'élève doit dire si d'autres petits espiègles se cachent derrière. Dans cette activité, il faut comparer un groupe de Subitos à lui-même; aucune correspondance terme à terme visuelle n'est possible.

Attention! La question à poser est : « Y en a-t-il d'autres derrière la porte close? »

Activité 4 : Plage

Matériel requis

- Vidéo EtapeA_Plage.mov ;
- Documents d'accompagnement.

L'élève doit garder l'œil sur des Subitos qui sautent à l'eau et qui ressortent. Pendant qu'un camion s'arrête et cache le lac, il faudra davantage porter attention aux bruits qui accompagnent chaque entrée (plouf!) ou chaque sortie (boing!). Quand le camion s'éloigne, il arrive que certains Subitos soient cachés sous l'eau. Si c'est le cas, on les verra éventuellement refaire surface, en rigolant. Ici encore, il faut comparer un groupe de Subitos à lui-même; aucune correspondance terme à terme visuelle n'est possible.

N'oubliez pas de hausser le volume de vos haut-parleurs!

Attention! La question à poser est : « Y a-t-il des Subitos encore cachés sous l'eau? »

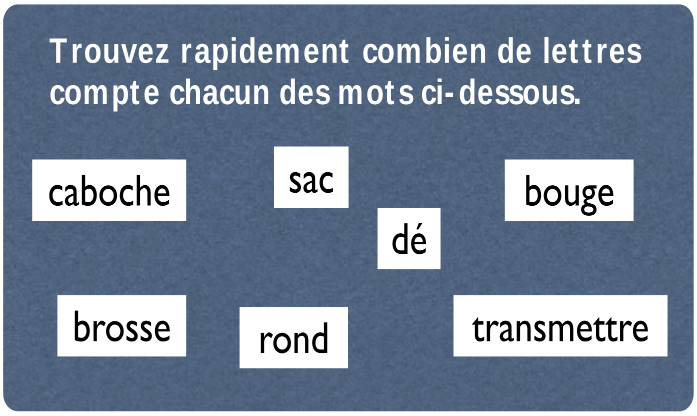
Étape B : Comptage et nombre flou

Au moment de passer à une nouvelle étape incontournable, l'orthopédagogue qui adopte la présente progression devrait obligatoirement répondre aux deux questions suivantes :

1) Les **exigences de l'étape** où se situe actuellement l'élève sont-elles suffisamment **maîtrisées** pour passer à une étape plus exigeante?
2) Quel scénario de **conflit cognitif** ferait ressentir à l'élève la **pertinence de faire appel à de nouvelles stratégies** afin de faire progresser son sens du nombre?

Quelle est la pertinence de passer à l'Étape B? Quand l'enfant maîtrise les attentes décrites à l'Étape A, c'est le **dépassement incontrôlable des limites de la subitisation perceptuelle qui va stimuler le recours aux stratégies de comptage,** qui sont les acquisitions incontournables de l'Étape B : la *subitisation structurelle*[20] et l'*énumération.* Tout scénario visant à placer l'élève en conflit cognitif doit donc progressivement pousser jusqu'à 10 et plus les numérosités à mémoriser, forçant l'adoption de stratégies plus « structurées ». Des suggestions d'activités seront présentées ci-dessous.

Voici un exemple qui illustre les différentes stratégies de comptage évoquées ci-dessus.



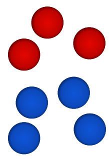
Le comptage des mots de 2 ou 3 lettres se fait globalement et de façon presque instantanée, par *subitisation perceptuelle*. Le mot *rond* permet de ressentir la limite de cette aptitude relevant de l'Étape A.
Le comptage des mots de 5 lettres et plus repose sur deux stratégies plus structurées (ou leur combinaison) :

1) Subdiviser en groupes de 2 ou 3 lettres [*subitisation structurelle*];
2) Compter les lettres une à une [*énumération*].

Avant de cerner davantage les stratégies qui marquent le passage à l'Étape B, il est important de rappeler que le nombre dont il sera ici encore question n'a toujours pas le caractère abstrait recherché par Piaget, au stade opératoire. Pour reprendre l'expression adoptée par Stanislas Dehaene[21], il s'agit d'un « *nombre flou* » donnant lieu à une **arithmétique encore informelle et essentiellement fondée sur le comptage.**

Comptage global ou visuel

Quand des numérosités supérieures à 3 doivent être mémorisées, c'est la **subitisation structurelle** qui semble constituer la stratégie la plus intuitive et qui apparaît probablement la première chez l'enfant. Cette stratégie repose principalement sur la capacité de manipuler des **images mentales appelées constellations.**



Juxtaposition de petites numérosités

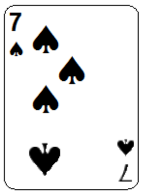
Une *constellation* est une *structuration visuelle* d'une collection ayant plus de 3 éléments qui permet de reconnaître sa numérosité de façon quasi instantanée. Une constellation (voir ci-contre) peut être obtenue par juxtaposition de petites numérosités ou mieux, en disposant les éléments de façon régulière et plutôt *esthétique.*

Dispositions régulières

[20] Rappelons la classification de D. H. Clements (1999), à savoir que la *subitisation perceptuelle* est l'aptitude innée ou très précoce qui permet de mémoriser instantanément des numérosités jusqu'à 3, tandis que la *subitisation structurelle* permet à peu près la même performance avec plus d'éléments, mais en recourant à des régularités visuelles, rythmiques, temporelles, kinesthésiques ou spatio-auditives. Dans le cadre du présent document, nous insistons davantage sur les régularités visuelles, puisque les autres facettes de la subitisation structurelle font encore l'objet d'expérimentation.

[21] La bosse des maths – Quinze ans après, (2010), ouvrage déjà cité.

Le comptage visuel est effectué globalement, à la manière de la subitisation. Par exemple, on peut trouver ce qui a été effacé sur la carte à jouer ci-contre, sans passer par un calcul abstrait (7 – 3 = 4) et sans nécessairement dénombrer une à une les figures qui restent ou celles qui ont été effacées (4… 5, 6, 7). **Le comptage global ou visuel permet de percevoir en bloc** les figures qui manquent, **par superposition avec l'image mentale** de la constellation familière du 7 de pique.



Le comptage global ou visuel est malheureusement sous-valorisé dans notre culture scolaire frénétiquement tournée vers le comptage séquentiel et surtout verbal. Ce manque de considération pour un environnement arithmétique aussi intuitif que fécond peut entraîner des conséquences fâcheuses pour plusieurs élèves sachant que :

« […] *jusqu'à l'âge de cinq ans, les problèmes simples d'addition et de soustraction sont mieux et plus précocement résolus quand ils sont présentés sous forme non verbale. [Avant 5 ans], ils échouent si on leur présente ces opérations avec un énoncé, que ce soit sous la forme d'une histoire, de nombres d'objets à ajouter, ou simplement d'opérations abstraites.* »[22]

Comptage séquentiel ou verbal

Malgré sa simplicité et son apparition en très bas âge, le comptage global n'est pas toujours une stratégie appropriée quand il faut mémoriser des numérosités. C'est notamment le cas quand les éléments à mémoriser sont égrenés, et donc perçus un à un, ou encore quand il s'avère impossible de déplacer ou de regrouper les objets à compter. Dans ces conditions, la stratégie alternative qui s'impose est le **comptage séquentiel**, un procédé fondé sur l'énumération et hérité de la subitisation auditive.

L'*énumération* est une *structuration séquentielle* d'une collection qui permet de parcourir tous les éléments, un à un et d'une façon ordonnée et contrôlée. La *chaîne numérique verbale* est la plus familière procédure utilisée pour énumérer une collection en vue d'en déterminer la numérosité. Compter en utilisant les doigts, des jetons ou des marques implique également le recours à l'énumération[23].

C'est donc l'absence d'accès global aux éléments d'une collection qui oblige le comptage à se déplacer des aires visuelles du cerveau vers les aires verboauditives. **Ces deux types de comptage peuvent être très inégalement maîtrisés par l'élève et ainsi causer des déséquilibres nuisant aux acquisitions subséquentes.** Les difficultés rencontrées sont parfois augmentées par la tradition mathématique dans laquelle le comptage est presque totalement monopolisé par la stratégie séquentielle utilisant la chaîne numérique verbale.

La rééducation du nombre chez l'élève exige la réhabilitation préalable du comptage sur les doigts à l'école. Les recherches neurologiques les plus pointues ont démontré hors de tout doute que **le sens du nombre est cérébralement branché sur le centre nerveux du contrôle des doigts.** N'est-il pas infiniment révélateur d'apprendre que c'est précisément tout autour du centre de contrôle digital que s'est installée la zone neurologique du calcul humain[24] ? Le comptage sur les doigts devrait accompagner l'enfant dans sa conquête du nombre abstrait puisqu'il constitue le lieu privilégié de toutes les réflexions numériques élémentaires, notamment celles conduisant au concept d'addition/soustraction, et ce depuis des temps immémoriaux!

À l'Étape B, la maîtrise de la chaîne numérique verbale joue un rôle crucial et évident dans le développement du comptage séquentiel et elle contribue également à la conquête du nombre abstrait, décrit à l'Étape 1. Le tableau ci-dessous permet de définir les principales acquisitions menant à l'utilisation compétente de la chaîne numérique verbale [25] et de les mettre en relation avec les différentes étapes incontournables jalonnant cet apprentissage.

---

[22] Huttenlocher et al. dans *Compter sur les doigts*, Les Dossiers de la Recherche N° 34, Février 2009, p. 80 ou en ligne http://tinyurl.com/compter-doigts

[23] Le terme *énumération* s'oppose à *numération*, comme nous le verrons mieux à l'Étape 3.

[24] À lire absolument, *Compter sur les doigts,* article déjà cité http://tinyurl.com/compter-doigts.

[25] Séquence proposée par Karen C. Fuson et exposée dans le chapitre *Relations entre comptage et cardinalité* de l'œuvre épuisée Les chemins du nombre, Presses Universitaires de Lille, 1991.

Maîtrise de la chaîne numérique verbale

ACQUISITION	DESCRIPTION	LIEN
Chapelet [avant 4 ans]	Récitation alignant des mots indifférenciés : *undeuxquatredix ou undeuxtroisquatrecinqsixsept* ou…	Étape A
	Des mots-nombres sont différenciés et associés aux petites numérosités qui sont subitisées en premier : un, deux et trois.	Étape A
Chaîne INSÉCABLE [Vers 4 – 5 ans]	Les mots-nombres sont associés à des constellations.	Étape B
	La suite de mots-nombres (comptine) est associée à des éléments qu'il faut énumérer en la récitant. **Principes du comptage élémentaire** (voir la note 1) : • *Ordre stable,* récitation correcte de la comptine numérique*;* • *Correspondance terme à terme* durant l'énumération.	Étape B
Chaîne SÉCABLE [Vers 5 ans]	Le comptage peut se faire à partir de… et souvent en faisant appel à des stratégies de subitisation (doigts, images mentales, constellations, etc.). Début du compte à rebours comme base de la soustraction.	Étape B
Chaîne TERMINALE [Vers 6 ans]	Capacité d'avancer (plus difficile de reculer) de n jusqu'à p et de trouver l'écart ($p – n$) entre les deux valeurs. **Principes du dénombrement** (voir la note 2) : • *Cardinalité,* le dernier mot-nombre dit combien il y en a; • *Abstraction*, on peut compter des objets très disparates; • *Non-pertinence de l'ordre* suivi pour compter les éléments.	Étape 1
Chaîne BIDIRECTIONNELLE [Vers 7 ans]	Développement de la pensée opératoire et acquisition du concept de nombre abstrait. Recours stratégique à la décomposition additive pour opérer.	Étape 1
Chaînes GROUPÉES [1re – 2e année]	Dénombrement sans nécessité de refaire l'énumération complète des unités déjà regroupées (voir la note 3). Dénombrement par bonds, par dizaines… et comptage mixte (par ex. : 10, 20, 30, 31, 32, 33, 34).	Étape 2

Début du CALCUL	Dénombrer ce n'est pas calculer. **Dénombrer** suppose le recours à un **procédé d'énumération de toutes les unités. Calculer** consiste à utiliser des **procédés opératoires ou des algorithmes** sur des grandeurs ou des nombres exprimés dans un **système de numération.** *Calculer* s'oppose à *dénombrer*, comme *numération* s'oppose à *énumération*.	Étape 3

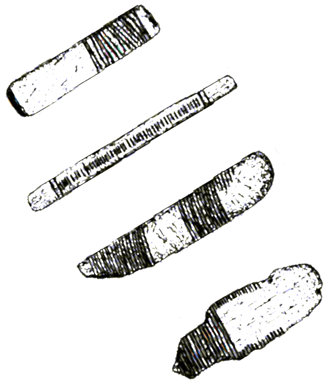
Notes importantes :

1. Le *dénombrement* permet de déterminer le cardinal d'un ensemble en recourant habituellement à la chaîne numérique verbale. Le *comptage* est plus primitif, car il consiste à associer un et un seul mot-nombre à chaque élément énuméré. Si on pose la question « *Combien?* », l'élève qui a dénombré mentionne spontanément le dernier mot-nombre ayant été utilisé (principe de cardinalité), tandis que l'enfant qui a fait un simple comptage reprend son énumération à partir du début, comme si la réponse à cette question était assimilée au numérotage lui-même.
2. Les principes du comptage sont les plus élémentaires dans l'acquisition de la chaîne numérique verbale et ils précèdent les principes du dénombrement. Ces cinq principes ont d'abord été formulés par R. Gelman et C. R. Gallistel dans *The Child's Understanding of Number,* Cambridge MA, Harvard University Press (1978).
3. Nous proposons d'ajouter cette habileté pour compléter les acquisitions de la chaîne numérique verbale. Elle constitue l'ultime préalable conduisant au calcul proprement dit.

Scénario d'évaluation : Étape B

Matériel requis

- Vidéos et documents (voir ci-dessous).



Os entaillés (40 000 ans)

Présentation de la tâche

Poursuivant dans la foulée de l'évaluation de l'Étape A, nous reprenons ici les mêmes thèmes (parties 1 à 4), mais pour des numérosités de 4 et plus. Dans la partie 5, nous posons directement la question *Combien?* » :

Partie 1. *Subitisation structurelle*
Des coccinelles apparaissent à la fenêtre.
Quelle photo a été prise à ce moment?

Partie 2. *Addition/soustraction*
Un store est tiré et cache des coccinelles.
Que verra-t-on en relevant de nouveau le store?

Partie 3. *Égalité* **Attention! Voir le protocole pour l'organisation matérielle.**
À la collation, les coccinelles mangent chacune un puceron.
Assurons-nous de ne pas faire de chicane…

Partie 4. *Comparaison*
Les coccinelles rouges aiment danser avec les jaunes.
Auront-elles toutes une partenaire?

Partie 5. *Comptage*
Évaluation des principes du *comptage.*
Combien y a-t-il de coccinelles?

L'élève qui maîtrise la présente étape réussira généralement bien à effectuer du **comptage global sur des constellations** et à **mémoriser des ensembles comptant jusqu'à une vingtaine d'éléments, par énumération.** La **chaîne numérique verbale insécable** est correctement mémorisée et utilisée, au moins jusqu'à 20. Le **compte sur les doigts** est bien employé pour soutenir la mémorisation et pour résoudre des cas simples et concrets d'ajout, de retrait, de différence...

Il était une fois : l'énumération

Bien avant de devenir verbal et de recourir à des mots-nombres, le comptage séquentiel a été effectué au moyen de cailloux, d'encoches et, depuis la nuit des temps, sur les doigts[26]. Les plus lointaines évidences d'énumération sont des os ou des bâtons entaillés remontant à près de 40 000 ans (voir l'illustration ci-dessus) et qui furent les premiers calendriers et registres de l'humanité. La pratique de l'entaille a connu une grande popularité auprès des bergers de la Préhistoire. L'antique bâton entaillé ci-dessous illustre

l'une des plus antiques astuces de subitisation structurelle (ici, 30 bêtes ont été comptées) : des encoches spéciales pour mieux repérer visuellement les 5e (ʌ) et 10e (x) entailles. Ce préhistorique type de registre numérique a plus tard donné naissance aux chiffres étrusques, eux-mêmes à l'origine des chiffres romains.

[26] Sans oublier les repères corporels, pour des comptes jusqu'à 23, 30, 41… Pour en savoir plus au sujet des lointaines origines humaines du comptage séquentiel et non verbal, consultez le remarquable ouvrage de Georges Ifrah, *Histoire universelle des chiffres,* Éditions Robert Laffont, Bouquins, Paris 1994.

Quoi faire pour aider?

Les suggestions d'activités qui suivent permettent de s'assurer que l'élève possède les acquisitions essentielles de comptage attendues à l'Étape B.

Note importante : Dans toutes les activités qui suivent, méfiez-vous toujours des différentes interprétations que les enfants donnent à la question « *Combien*? » Le sens accordé fait la différence entre savoir compter (Étape B) et savoir dénombrer (Étape 1). Des formulations alternatives permettent de contourner cette difficulté (voir ci-dessous), même si la question « *Combien*? » appartient bel et bien à cette étape entièrement fondée sur le comptage.

Activité 1 : Magie

Matériel requis

- Vidéo ÉtapeB_Magie.mov;
- Documents d'accompagnement.

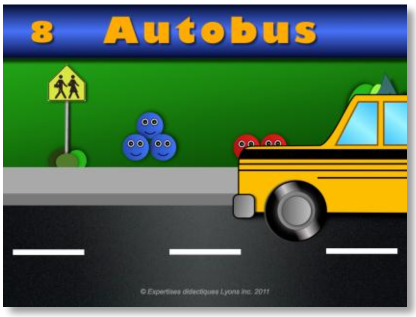
La vidéo montre un magicien qui fait disparaître quelques symboles d'une carte à jouer. Les cas sont progressivement plus exigeants, au fur et à mesure que l'élève affronte les difficultés propres au comptage visuel. On encourage l'élève à pointer pour indiquer sa réponse ou à décrire l'endroit où se trouvaient les figures qui ont disparu.

Les questions à poser sont : « *Montre-moi les carreaux disparus*. » et « *Combien en manque-t-il?* »

Activité 2 : Autobus

Matériel requis

- Vidéo ÉtapeB_Autobus.mov;
- Documents d'accompagnement.



La vidéo montre des Subitos qui se rendent à l'arrêt d'autobus. Le bus arrive et voile ceux qui montent à bord. Quand l'autobus repart, on voit les Subitos qui attendent le bus suivant.

Dans la première partie, le recours aux couleurs et aux constellations facilite le **comptage visuel.** L'utilisation de jetons doit être encouragée pour aider l'élève à visualiser les constellations.

Progressivement, un son accompagne chaque Subito qui se présente à l'arrêt et, si le bus arrive en premier, l'élève n'aura d'autre choix que de recourir au **comptage séquentiel** pour suivre le déroulement. Encouragez le recours aux jetons, puis le compte sur les doigts, pour accompagner l'utilisation de la chaîne numérique verbale.

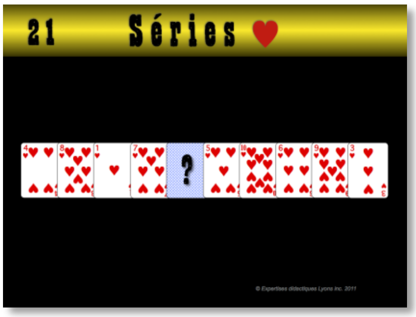
N'oubliez pas de hausser le volume de vos haut-parleurs!

Les questions à poser sont : « Où étaient-ils placés? » et « Combien sont partis? »

Activité 3 : Séries

Matériel requis

- Vidéo ÉtapeB_Séries.mov;
- Documents d'accompagnement.



La vidéo montre des séries de cartes d'abord placées en ordre. En cachette, des cartes sont retirées et l'élève doit trouver lesquelles. Le même exercice est ensuite proposé avec des séries placées en désordre.

L'activité stimule le recours à la chaîne numérique verbale pour le comptage jusqu'à dix.

La question à poser est : « Quelle(s) carte(s) manque(nt)? »

Activité 4 : Sauve-moutons

Matériel requis

- Vidéo ÉtapeB_Sauve-moutons.mov;
- Documents d'accompagnement.

La vidéo montre des moutons qui quittent la bergerie le matin et y reviennent le soir. Naturellement, il est important de savoir si toutes les bêtes sont de retour, et sinon, de trouver combien manquent à l'appel. Il arrive aussi que le compte soit exact (on entendra des applaudissements) ou qu'un petit naisse durant la journée (on entend un rire et le bruit d'un hochet)!

Un tel contexte a jadis inspiré le recours à toutes les stratégies d'énumération que l'élève doit maintenant développer, à l'Étape B. Ici encore, le recours aux jetons et le compte sur les doigts sont fortement encouragés pour supporter le **comptage séquentiel** et le l'acquisition de la chaîne numérique verbale.

Questions à poser : « Les moutons sont-ils tous là? » et « Combien en manque-t-il? »

Activité 5 : Patiences

Les patiences et de nombreux jeux de cartes constituent d'excellentes activités pour stimuler l'acquisition du concept de nombre ainsi que de plusieurs autres notions mathématiques fondamentales : mémoriser les chiffres et certaines dispositions numériques conventionnelles, comparer et ordonner des nombres, compter, opérer, classer, discriminer, estimer, anticiper, établir une probabilité, élaborer une stratégie et la modifier au besoin, etc. De plus, ces activités sollicitent de nombreuses habiletés motrices : mêler et distribuer les cartes, disposer des arrangements réguliers, former des piles, couvrir, retourner, défausser, etc. Enfin, comme dans tous les jeux de société, de nombreuses habiletés sociales sont valorisées : jouer à son tour, collaborer (jeux en équipes), persévérer, apprécier les bons coups de l'adversaire, gagner et perdre avec dignité, s'amuser sainement, développer des comportements responsables face au jeu[27], etc.

[27] Le fléau du jeu compulsif et une rectitude politique tout aussi affligeante incitent certaines personnes bien intentionnées à vouloir éliminer du paysage scolaire tout ce qui peut ressembler à une carte à jouer ou à un dé. Une analyse plus subtile nous indique pourtant que les enfants n'ont jamais aussi peu joué aux cartes qu'aujourd'hui, une tendance diamétralement opposée à la progression du nombre de joueurs compulsifs! Ici comme ailleurs, en pareilles circonstances, la modération et l'éducation ont bien meilleur goût.

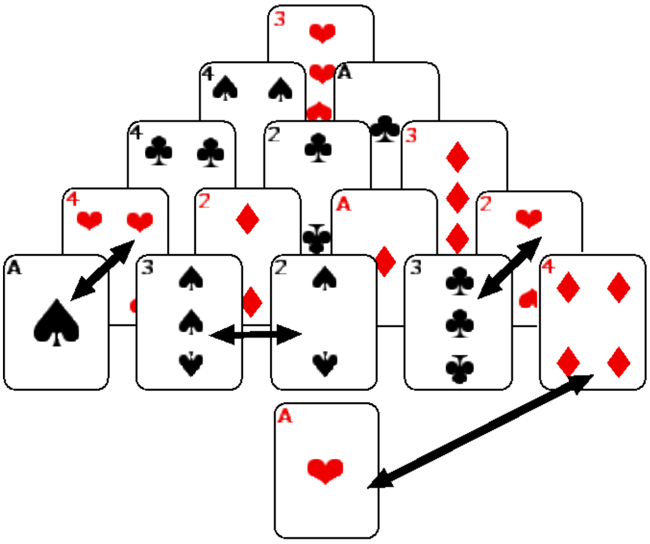
a) Pyramide

Cartes Tous les as, 2, 3 et 4 (16 cartes) d'un jeu de cartes ordinaire.

Disposition Mêler les cartes et les placer comme dans l'illustration ci-dessous.

But du jeu Retirer toutes les cartes de la pyramide, par paires.

Déroulement Retirer simultanément deux cartes « libres » dont la somme est 5 (voir les flèches formant des paires). La carte qui se trouve au bas de la pyramide (A♥, dans notre exemple) peut être utilisée en tout temps avec une autre carte libre pour obtenir une somme de 5. Deux cartes posées l'une sur l'autre sont considérées comme libres, si aucune autre carte ne les bloque (voir 3♣ et 2♥, dans l'exemple).



Par exemple : retirer A♥ et 4♦, puis les 2♠ et 3♠, ensuite A♠ et 4♥ et enfin, retirer 3♣ et 2♥. Dans cet exemple, le jeu s'arrête parce que les cartes qui restent sont bloquées. Le joueur a accumulé 8 points. Qui dit mieux?

Variante Avec les cartes de l'as au 9, soit 36 cartes, former une pyramide sur 8 rangs. Dans ce cas, il n'y aura aucune carte libre au bas de la pyramide. Il faut ici aussi retirer deux cartes à la fois, mais dont la somme est 10.

Suggestion Placer les élèves deux par deux en créant un peu de compétition. Pendant que l'un joue, l'autre s'assure de l'application correcte des règles du jeu. Les élèves en jouent 2 ou 3 rondes en cumulant leurs points.

b) Danse des souris

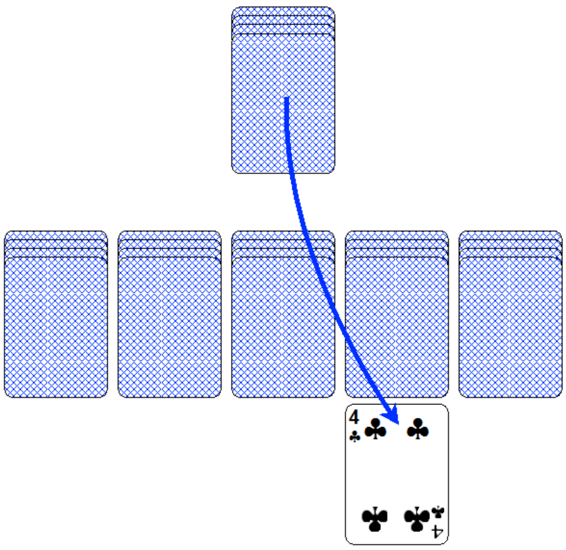
Cartes Tous les as, 2, 3, 4, 5 et rois (24 cartes) d'un jeu de cartes ordinaire.

Disposition Mêler les cartes et les placer, faces cachées, pour former 6 piles égales disposées comme dans l'illustration ci-dessous.

Contexte Les cartes basses représentent des souris en train de s'amuser dans la cuisine, pendant que le chat n'y est pas.

Les piles du bas représentent les trous de souris. Les cartes qui sont ouvertes sous ces piles sont des souris qui ont quitté la cuisine pour se mettre à l'abri.

Chaque roi retourné lance un avertissement : « *Attention! Le chat s'en vient...* »

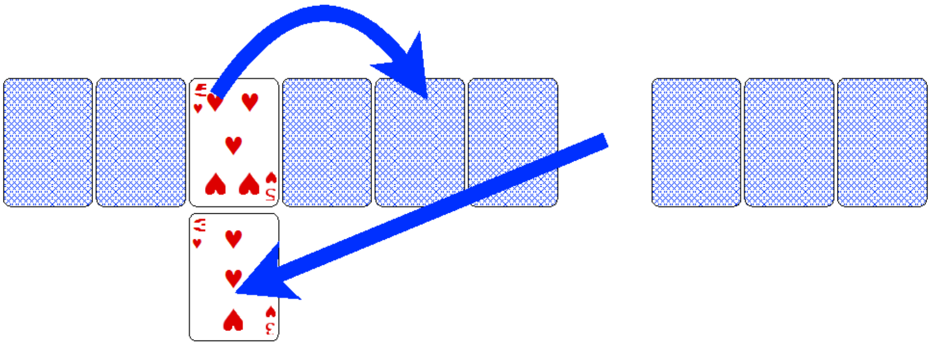


Le jeu s'arrête dès que le quatrième roi est retourné ou si une erreur mécanique se produit (par ex. il manque une carte à retourner dans une pile).

But du jeu	Ouvrir le plus de cartes (les souris quittent la cuisine) possible avant d'avoir retourné le quatrième roi (le chat arrive). On compte alors le nombre de souris sauvées et l'on cherche à améliorer cette marque.
Déroulement	Retourner la carte du dessus de la pile du haut (ici, le 4 de trèfle) et la placer sous la pile appropriée (dans l'exemple, c'est donc le 4e trou de souris), à partir de la gauche. Retourner la carte du dessus de cette pile (la 4e, dans ce cas) et la placer sous la pile qui correspond à cette nouvelle valeur. Les rois qui sont retournés doivent être placés à côté de la pile du haut, où l'on tire alors la carte suivante. Poursuivre ainsi jusqu'à l'apparition du quatrième roi (fin de la partie).
Variante	Ajouter les 6, les 7, etc. élève la difficulté du jeu tout en diminuant la probabilité de réussite. Avec les 52 cartes, on retrouve le solitaire original, l'horloge. Dans ce cas, les cartes sont disposées en cercle, aux 12 positions de l'horloge ; les rois sont placés au centre. Les règles de déroulement demeurent les mêmes.
Suggestion	Quand les élèves maîtrisent suffisamment les règles du jeu, demandez que les cartes-souris qui quittent la cuisine soient placées **face cachée.** L'élève doit donc à chaque fois trouver la bonne sortie, sans pouvoir se fier aux cartes déjà ouvertes.

c) Suite magique

Cartes	Une seule suite de l'as au 10 d'une même sorte.
Disposition	Mêler les cartes et les placer, faces cachées, sur un seul rang.



But du jeu	Rétablir la suite ordonnée, de gauche à droite, de l'as au 10.
Déroulement	Retourner une première carte, au hasard (le 3, dans l'exemple ci-dessus). Placer cette carte à sa position numérique dans la suite. Si une carte se trouve à cette position (le 5, dans le même exemple), la retourner et la placer à son tour, à sa position, et ainsi de suite. La partie s'arrête dès qu'une carte comble le « trou » laissé par la première carte.
Variante	Ajouter les figures de la série, pour une suite plus difficile à réussir.
Suggestion	Quand les élèves maîtrisent suffisamment les règles du jeu, interdisez le recomptage systématique à partir de la première carte. Le comptage ne peut commencer qu'à partir de la carte ouverte la plus proche, à gauche de la position visée. Dans l'exemple ci-dessus, pour placer le 5, l'élève doit **compter seulement à partir du 3** : « Trois, quatre, cinq ».

Étape 1 : Analogie numérique et nombre abstrait

Quelle est la pertinence de passer à l'Étape 1? Jusqu'ici, la pensée numérique de l'élève s'appliquait isolément et directement sur des êtres **concrets, illustrés** ou **audibles.** Mais, comment effectuer un comptage s'il est **impossible d'accéder de façon tactile, visuelle ou auditive aux éléments à mémoriser**? Cette barrière sensorielle existe notamment pour tous les **problèmes oraux** posés en arithmétique, lors des premiers pas scolaires. Toutefois, vers l'âge de 6 – 7 ans, une plus grande souplesse des images mentales et l'évolution du langage vont favoriser l'émergence de nouvelles stratégies[28] qui constituent les cibles incontournables de l'Étape 1 : l'**analogie numérique** et le **nombre abstrait**.

Les acquisitions visées à l'Étape 1 dépassent les capacités de reconnaissance des chiffres, de lecture ou d'écriture des nombres. Il ne suffit pas non plus de compter correctement les éléments d'un ensemble ni de savoir ordonner des nombres ou opérer. Aujourd'hui, toutes ces performances logiques et mécanisables sont aisément réalisées par l'ordinateur. En revanche, la « savante » machine demeure absolument incapable de former le moindre concept, celui de nombre y inclus! Pour faire évoluer son sens du nombre, l'élève doit désormais profiter de la subtilité grandissante de ses images mentales et de ses capacités langagières de plus en plus abstraites et structurées.

Analogie numérique

Le sens évolué du nombre recherché à l'Étape 1 se manifeste d'abord chez l'enfant par le **recours stratégique et spontané** à des supports concrets (doigts, jetons…) ou imagés (marques, dessins…) qui vont servir de **matériel de substitution** aux éléments de la réalité. Ainsi, au moment de résoudre un problème à données numériques, l'élève **quitte spontanément la réalité du contexte évoqué oralement**[29] en recourant à un support commode qui lui permette de représenter les éléments à mémoriser, à comparer ou à transformer. Au terme de cette parenthèse de substitution, quand les opérations appropriées ont été effectuées, l'enfant franchit mentalement et en sens inverse son **pas de côté analogique** pour retourner à la réalité avec la **conviction** que les résultats rapportés sont parfaitement **transférables** à la solution du problème de départ[30]. Ce **va-et-vient conscient et contrôlé,** que nous appelons *faire comme si,* constitue une manifestation essentielle de **compréhension.** Cette performance de mentalisation se distingue du simple comptage par la **décision d'y recourir au moment opportun** et par la **stratégie de transfert** qu'elle met en œuvre.

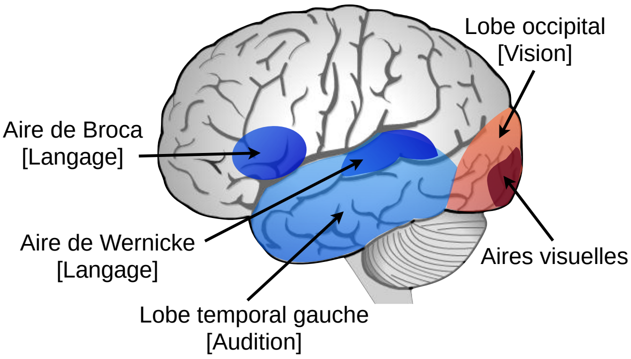
L'**analogie** est une **image mentale** qui établit un **lien de ressemblance partielle** entre **deux choses ou idées de nature différente.** La **pensée analogique** est de nature globale, visuelle et souvent culturelle. Elle donne lieu au **processus cérébral** appelé **compréhension.** *Comprendre, permet d'associer un savoir abstrait à la réalité concrète.* En mathématiques, l'analogie permet de reconnaître un concept sous de **multiples représentations concrètes, imagées ou symboliques** et d'en **transférer** l'application dans diverses situations pratiques, imaginaires, théoriques…

[28] Il semble bien que cette émergence corresponde plus globalement au passage à l'*âge de raison,* qu'une longue tradition situe à partir de l'âge de 7 ans. Le mot *raison* est ici utilisé en relation directe avec les termes *raisonnement* et *rationalité.* Le stade piagétien des opérations concrètes recouvre grosso modo cette même période de maturité et d'ouverture à la pensée rationnelle.

[29] Ces considérations s'appliquent aussi aux problèmes écrits, qui comportent évidemment des difficultés supplémentaires à l'exercice de la pensée numérique abstraite.

[30] Éventuellement, l'élève pourra recourir à ce transfert analogique spontané à partir d'un questionnement verbal abstrait (« Trois plus cinq ? ») ou symbolisé (3 + 5 = □).

L'analogie numérique sollicite les aires visuelles du cerveau ; elle prolonge donc les stratégies **globales** de **subitisation** nécessaires aux acquisitions des Étapes A et B. L'analogie numérique se développe dans un environnement beaucoup plus **concret**, plus **visuel** et certainement plus **kinesthésique** que ne le réclament les exercices habituellement présentés dans les cahiers scolaires.



Nombre abstrait

Le second volet des acquisitions incontournables de l'Étape 1 fait davantage appel au **langage,** au **raisonnement** et éventuellement à la **symbolisation,** des processus qui appartiennent à la **pensée logique**. Cette composante langagière et rationnelle nous conduit à la définition piagétienne du concept de nombre, que nous préférons qualifier d'*abstrait,* pour bien le distinguer du sens des numérosités sur lequel sont établies les bases plus intuitives des Étapes A et B.

La **pensée logique** s'oppose à **pensée analogique** sur la base des processus cérébraux qui les animent, respectivement le raisonnement et l'image mentale. La pensée logique est **séquentielle** et fortement associée aux aires cérébrales consacrées au **langage et à l'audition.** Elle se distingue donc de la pensée analogique, qui fait davantage appel aux aires visuelles du cerveau et à la perception globale. La **pensée logique** donne lieu au **processus cérébral** appelé **raisonnement. Raisonner, c'est savoir établir des liens de cause à effet qui soient objectifs et démontrables.** La *logique mathématique* est définie comme la *science du raisonnement et de l'objectivité.*

Vers l'âge de 7 ans, les premières manifestations associées au nombre abstrait sont : l'acquisition des **principes de cardinalité, d'abstraction et de non-pertinence de l'ordre.** L'élève maîtrise alors les composantes **terminale** et **bidirectionnelle** de la chaîne numérique verbale; le **comptage** fait désormais place au **dénombrement.**

Les autres manifestations associées au nombre abstrait rejoignent la définition du **stade des opérations concrètes**[31] de Piaget. L'élève applique sa pensée logique dans des situations de **classification** et de **sériation** et la **conservation du nombre** est acquise.

Au **stade des opérations concrètes**, c'est le langage – renforcé par la capacité de **symbolisation** – qui va permettre à l'enfant non seulement d'évoquer les représentations mentales du nombre, de l'ordre et de l'addition/soustraction, mais surtout de les communiquer et de leur donner une **existence conceptuelle propre**. À ce stade, le nombre est considéré par l'élève comme une **propriété permanente et invariante d'un ensemble,** c'est-à-dire que le nombre n'est pas affecté par un transfert analogique et encore moins par un réarrangement quelconque des éléments de cet ensemble. L'addition est intégrée comme une opération **réversible, commutative** et **associative.**

Si le stade des opérations concrètes donne lieu à l'acquisition du concept de **nombre abstrait,** c'est principalement parce que l'enfant devient progressivement capable de **transformer diverses actions appliquées isolément sur des éléments concrets en une opération mentale intégrée à une structure logique, réversible et cohérente.** À l'Étape 1, le nombre prend le sens qui lui est habituellement accordé en mathématiques ; l'élève peut maintenant accéder à l'**arithmétique conventionnelle.**

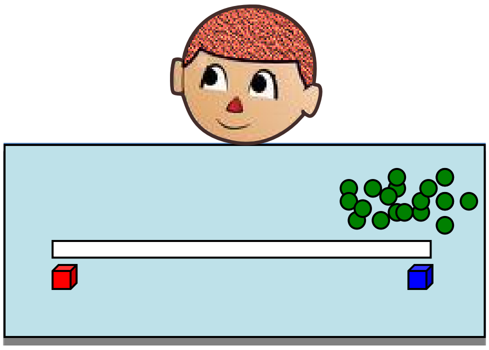
[31] Pour un résumé du sujet, voir **http://tinyurl.com/operatoire**. Pour des suggestions d'interventions, consulter également **http://www.defimath.ca/presco.html**.

Scénario d'évaluation : Étape 1

Présentation de la tâche

Partie 1 : Analogie numérique

Matériel requis

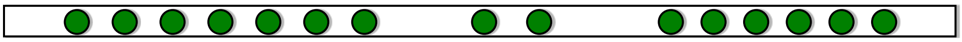


- 1 bande de papier mesurant environ 50 cm de longueur;
- 2 cubes de couleur différente;
- 20 jetons **identiques.**

Le matériel est disposé devant l'élève, comme le montre l'illustration ci-dessus.

Consignes à l'élève : « *J'aimerais te raconter une histoire et jouer à faire comme si c'était vrai. Voici ta maison et voici ton école (les cubes). Faisons aussi semblant que la bande de papier, c'est le chemin qui va de chez toi jusqu'à l'école. Sur le chemin de l'école, tu rencontres 7 chats, 2 écureuils et 6 chiens. Peux-tu mimer cette partie de l'histoire et dire combien d'animaux tu as rencontrés?* »

Sans formuler de suggestion au sujet des jetons, reprenez l'histoire du début, en faisant une pause après chaque groupe d'animaux, pour permettre à l'élève de disposer les jetons, au fur et à mesure. Si l'élève utilise des jetons pour représenter les 7 chats, demandez-lui de les aligner sur le chemin et pareillement pour les autres animaux de l'histoire afin d'obtenir éventuellement l'alignement ci-dessous.



Si l'élève n'utilise pas spontanément les jetons pour représenter les chats, formulez la suggestion suivante : « *Comment pourrait-on faire semblant que ces chats sont sur le chemin?* » Si l'élève ne sait toujours pas quoi faire, placez 7 jetons sur la bande de papier en évoquant l'idée de faire comme s'il s'agissait des chats. Poursuivez l'histoire, **sans autre intervention.**

L'élève qui utilise l'**analogie numérique** doit pouvoir effectuer les autres manipulations et dénombrer les jetons pour conclure clairement que **15 animaux** ont été rencontrés. Portez attention au fait que l'élève qui ne sait pas **dénombrer** ne va pas nécessairement énoncer le nombre 15, en guise de réponse, mais plutôt recommencer le compte quand vous redemandez : « *Combien y a-t-il d'animaux?* »…

Partie 2 : Nombre abstrait

Matériel requis

- Vidéo Étape1_Dénombrement.mov;
- Document d'accompagnement.

L'évaluation présentée dans la vidéo touche les acquisitions attendues du nombre abstrait. Elle peut également être accompagnée des épreuves piagétiennes du stade des opérations concrètes, même si ces dernières supposent une pensée rationnelle plus avancée[32].

L'élève qui a acquis le concept de nombre abstrait maîtrise :

1. Le dénombrement et ses principes :
   - *Cardinalité :*
   - *Abstraction ;*
   - *Non-pertinence de l'ordre.*
2. La chaîne numérique verbale (composantes terminale et bidirectionnelle) ;
3. La conservation du nombre.

[32] Pour une analyse critique des épreuves piagétiennes dans le contexte des découvertes sur le sens des numérosités des tout-petits, voir le chapitre III de La psychologie de l'enfant, PUF, *Que sais-je ?,* Olivier Houdé, 2004, (128 pages) ou lire un résumé en ligne.

Il était une fois : l'analogie numérique

L'histoire des mathématiques n'a gardé que peu de traces des premiers pas de notre espèce dans le recours à **l'analogie numérique.** Ce vide est dû au fait que les premiers supports de substitution étaient des repères corporels ou des objets courants (cailloux, coquillages, etc.). Par contre, toutes les langues portent encore la trace de ces modes de représentation primitifs dans leur vocabulaire numérique. Ainsi, le mot latin *calculus* signifie *petit caillou.* Le sens premier du mot *calculer* est donc : « manipuler des cailloux ». Le recours aux cailloux a évolué pour donner naissance aux tables à calculer et aux bouliers, encore en usage aujourd'hui.

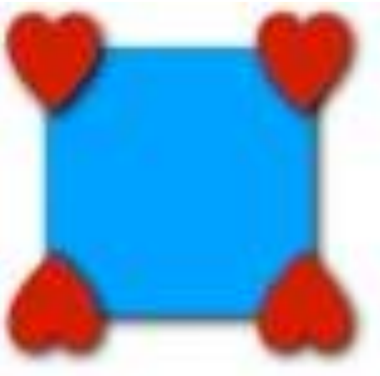
Les humains ont longtemps utilisé les doigts pour effectuer des comptes même fort complexes. Ce choix est directement la cause de la quasi-universalité du recours à la base dix, dans les premiers systèmes de numération. En anglais, le mot *digit* désigne un *doigt,* au sens propre, et un *chiffre,* au sens figuré. De même, l'adjectif *digital* est devenu synonyme de *numérique,* par exemple dans l'expression *digital clock.* Par ailleurs, il est démontré que les Mayas utilisaient aussi les orteils pour leurs comptes élémentaires, ce qui explique l'origine de leur numération de base vingt. Encore de nos jours, le calcul sur les mains demeure en usage dans plusieurs pays du Moyen-Orient et il a été poussé à un niveau technique remarquable dans plusieurs pays asiatiques.

Les encoches représentent un autre important support d'analogie numérique de l'histoire du calcul. Les plus anciens os entaillés affichant des comptes calendaires remontent à la nuit des temps. On retrouve même leur forme évoluée dans l'Empire britannique du XIX^{e} siècle, dont les comptes publics étaient enregistrés sur des planchettes entaillées, appelées *tallies* (en français, *taille*). Cette pratique est à l'origine d'expressions comme *trouver la taille* d'un échantillon statistique, qui signifie établir son nombre d'éléments. Les encoches sont à l'origine de l'idée de notation symbolique en mathématiques.

Quoi faire pour aider?

Les suggestions d'activités qui suivent permettent de s'assurer que l'élève progresse dans l'acquisition de l'analogie numérique et dans sa capacité de recourir au nombre abstrait.

Activité 1 : Fais comme si...



L'activité consiste à fournir des indices oraux, sonores ou visuels permettant de découvrir une carte cachée que vous tirez d'un jeu de cartes ordinaire. On dira, par exemple, qu'il s'agit d'une carte de cœur et que le nombre de cœurs peut être découvert en faisant comme s'ils étaient les coins d'un carré (c'est donc le 4). Pour renforcer l'analogie, quand cela est possible, invitez l'élève à vérifier sa réponse en établissant concrètement ou visuellement la correspondance terme à terme entre les jetons et la référence analogique qui est proposé (voir l'exemple ci-contre).

Dans la liste de cas ci-dessous, les ***analogies simples*** évoquent directement l'idée d'un **nombre**. Quant aux ***analogies opératoires***, elles évoquent une opération. Il est à noter que de telles analogies se retrouvent dans les problèmes oraux ou écrits d'arithmétique conventionnelle. Les analogies opératoires marquées du signe « ⊗ » sont plus difficiles, étant donné qu'elles font appel au concept de *multiplication*, plus proche de l'Étape 2. Elles demeurent intéressantes à proposer, même si leur réussite n'est pas incontournable, pour l'instant.

« *Pour découvrir ma carte, fais comme s'il s'agissait de...* »

a) Analogies simples

Les yeux d'un chat (2)
Les roues d'une automobile (4 ou 5...)
Les orteils d'une personne (10)
Les doigts d'une main (5)
Les jambes d'un poisson (0, bien sûr! Tirez la blanche…)
Les jours de la semaine où tu vas à l'école (5)
Les saisons de l'année (4)
Ton âge (5 ou 6)
Tous tes orteils (10)
Le plus de points sur une face d'un dé (6)
Les côtés d'un triangle (3)
Les fenêtres de notre local (...)
Les positions au jeu de *Tic tac toe (9)*
Les tiroirs du classeur noir (...)
Les affiches sur le mur du tableau (...)
Le chiffre que je vais dessiner au tableau (...)
Les jetons que je vais laisser tomber dans cette casserole, sans te les montrer (...)
Les ours de l'histoire de Boucle d'Or (3)
Les nains de l'histoire de Blanche-Neige (7)
Les lettres de l'alphabet avant « J » (9)
Le moins de points sur une face d'un dé (1)
Les coins d'un carré (4)
Les lettres du mot « papa » (4)
Les doigts que je te montre (...)
Les sons que je fais sur mon xylophone (7)
Les lumières d'un feu de circulation (3)
Le chiffre où pointe actuellement la petite aiguille de l'horloge (...)
Les bougies sur ton prochain gâteau d'anniversaire (...)
Les coins d'un cercle (0)
Le nombre de figures rouges d'un jeu de cartes ordinaire (6)
Les côtés d'un losange (4)
Les coins d'un cube (8)
Les jokers d'un jeu de cartes ordinaire (2)
Les points cardinaux (4)
Les colonnes d'un échiquier (8)
Toutes les figures d'un jeu de cartes (12)
Les notes de la gamme (8)
Les chiffres sur le clavier du téléphone (10)

b) Analogies opératoires

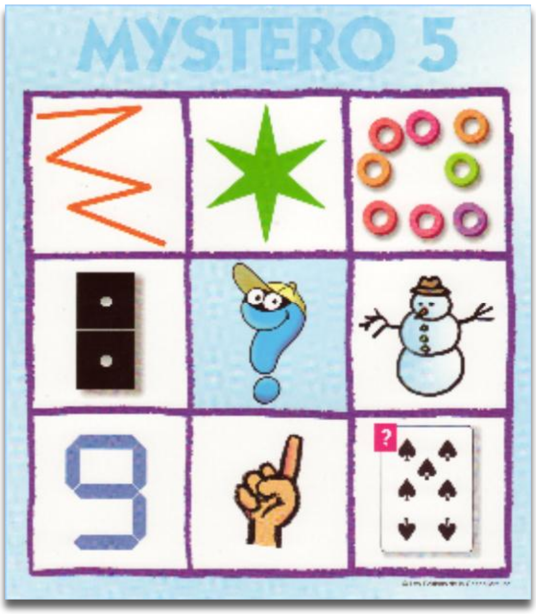
Les pattes d'un canard et d'un chien (6)
Les oreilles, le nez et les genoux (5)
Les doigts de ma main qui sont cachés (replier et cacher 3 doigts sur 5)
Les carreaux de la fenêtre, sauf 4 (...)
Les coins du cube et de la pyramide (13)
Les jours de la semaine, sauf lundi, mardi et mercredi (4)

⊗ Les pattes de 2 chevaux et 1 poule (10)
⊗ Les pattes de 3 chaises sauf 3 pattes qui sont cassées (9)
⊗ Les oreilles de 3 enfants (6)
⊗ Les doigts des 2 mains, sauf les pouces (8)
⊗ La moitié des roues de 3 automobiles (6)
⊗ Les coudes de 5 enfants (10)
⊗ 4 paires de chaussures (8)

Activité 2 : Centre d'activités *MYSTERO*

Le jeu *MYSTERO*[25] a été spécialement conçu pour stimuler l'idée d'analogie numérique et supporter l'acquisition du nombre abstrait. Chaque case de la grille évoque l'idée d'un nombre différent, de 1 à 9. La case centrale contient le MYSTERO, un nombre caché à découvrir par élimination.

À titre d'exemple, voici la carte de jeu n° 5 (niveau débutant) accompagnée de deux solutions possibles.



MYSTERO 5

5	6	8
2	4	3
9	1	7

Solution 1

MYSTERO 5

4	1	8
2	9	3
6	5	7

Solution 2

La réponse la plus probable est fournie (Solution 1). Cependant, d'autres réponses existent souvent. Ainsi, la main dressée pourrait tout aussi bien évoquer le nombre de doigts repliés (4)… ce qui modifierait le nombre mystère. De plus, un regard attentif sur l'autre réponse proposée (Solution 2) démontre l'importance de toujours demander à l'élève de justifier ses choix (dans ce cas : segment à 4 pointes, 1 étoile, 8 anneaux, 2 points sur un domino, 3 boutons sur le bonhomme de neige, 6 segments utilisés pour afficher le chiffre 9, 5 doigts d'une main, 7 de pique; le MYSTERO serait 9).

Note importante : La subtilité de la **pensée analogique** réside dans sa nature **culturelle** et **floue**, d'où son caractère insaisissable pour les ordinateurs. MYSTERO est un exemple parmi d'autres de jeu à la portée de pratiquement tous les enfants de 6 ou 7 ans, mais totalement inaccessibles aux ordinateurs, même les plus puissants construits à ce jour! Comme plusieurs élèves en difficultés, l'ordinateur ne maîtrise toujours pas la pensée analogique.

Activités de jeux d'addition

Dans les activités qui suivent, l'élève apprend à former des couples différents de sous-ensembles contenant tous le même total d'éléments. La réflexion de l'élève porte sur la notion de **décomposition additive** et favorise la maîtrise de la chaîne numérique verbale, particulièrement l'acquisition de la **chaîne bidirectionnelle.** Le tableau de consignation des complémentaires (voir la documentation) associe le nombre abstrait à la solution qu'il faut d'abord développer concrètement. Éventuellement, on exigera de remplir directement un tableau, sans passer par la manipulation.

[25] MYSTERO, Michel Lyons et Robert Lyons, Édition Chenelière Éducation, 1999.

Activité 3 : Nombres au menu

Matériel requis

- Vidéo Étape1_Menu.mov;
- Documents d'accompagnement.

La vidéo présente une visite à la cantine de M. Duquatre. Dans son assiette, ce client difficile à satisfaire désire systématiquement recevoir 4 aliments, pas un de plus et rien de moins. De plus, s'il n'obtient pas la combinaison de boucles et de boulettes qu'il désire, il fait la moue… Pour le dessert, des fraises et des bleuets sont au menu. Et M. Duquatre qui recommence, avec sa manie du 4!

L'élève doit systématiquement réaliser les combinaisons de 4 aliments avec des images réalistes, puis avec du matériel de substitution. Les nombres 5 et suivants peuvent également être mis en vedette, de la même manière. Progressivement, un tableau de nombres devrait être utilisé parallèlement au matériel, jusqu'à ne plus utiliser de matériel.

L'activité développe la notion de décomposition additive et stimule également l'utilisation pertinente du nombre abstrait.

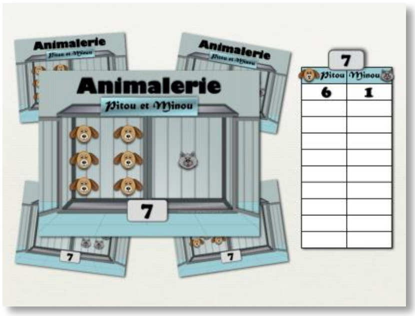
La question à poser est : « Quelle(s) assiette(s) contenant 4 aliments manque(nt)? »

Activité 4 : Animalerie

Matériel requis

- Vidéo Étape1_Animalerie;
- Documents d'accompagnement.

L'activité vise des objectifs similaires à la précédente, mais en proposant un contexte différent. Lors d'une visite à l'animalerie, 3 animaux occupent les cages voisines des chiens et des chats; une photo est prise. Lors de deux autres visites, une nouvelle photo est prise montrant chaque fois 3 animaux, mais dans une répartition différente. L'élève doit reconstituer la photo qui complète l'album du 3 avec des figurines (chiens et chats) et une cage vide.



Des photos de toutes les combinaisons de 2 à 8 animaux sont fournies dans la documentation. Pour un nombre comportant plusieurs décompositions, on montre d'abord 4 ou 5 photos différentes et on demande à l'élève de dresser la liste des photos manquantes. Comme dans l'activité 3, l'élève devra progressivement effectuer des décompositions en utilisant du matériel de substitution (jetons identiques), puis exclusivement un tableau.

La question à poser est : « Quelle(s) photos(s) d'animaux manque(nt)? »

Notes importantes :

1. À cette étape-ci du développement du concept de nombre, vous devrez fortement encourager l'élève à utiliser du **matériel de substitution** pour représenter les êtres de la réalité, au moment d'élaborer ses solutions. Bien que nous fournissions des illustrations réalistes, le recours à des jetons comme **support analogique** demeure un but intermédiaire visé par l'activité. Cependant, débutez le travail avec chaque vidéo en laissez l'élève utiliser les illustrations pour bien camper le contexte.
2. L'utilisation indépendante des tableaux de complémentaires encourage le recours au nombre abstrait. L'élève doit pouvoir les remplir avant de passer à l'Étape 2.
3. Avec *n* objets à répartir en deux sous-ensembles, Il y a (n + 1) décompositions.

Étape 2 : Groupement récurrent et multiplication

Quelle est la pertinence de passer à l'Étape 2? Quand le concept de nombre abstrait est solidement acquis, le défi incontournable suivant apparaît au moment où il faut mémoriser plusieurs dizaines d'éléments. L'idée de **structurer une collection en petits groupes, de façon récurrente,** donne naissance à de nouvelles stratégies de mémorisation permettant de **visualiser** ou de **décrire** des ensembles de plus en plus grands, **en très peu d'effort.**

Le groupement simplifie davantage la mémorisation que la fastidieuse énumération des éléments. Pour être pleinement efficace, la structuration d'une collection doit cependant respecter les critères minimaux suivants :

1. Nombre d'éléments identiques dans chaque groupe **(base du groupement);**
2. Regroupement des groupes devenus plus nombreux, en appliquant aux groupes de groupes le principe qui précède **(groupement récurrent).**

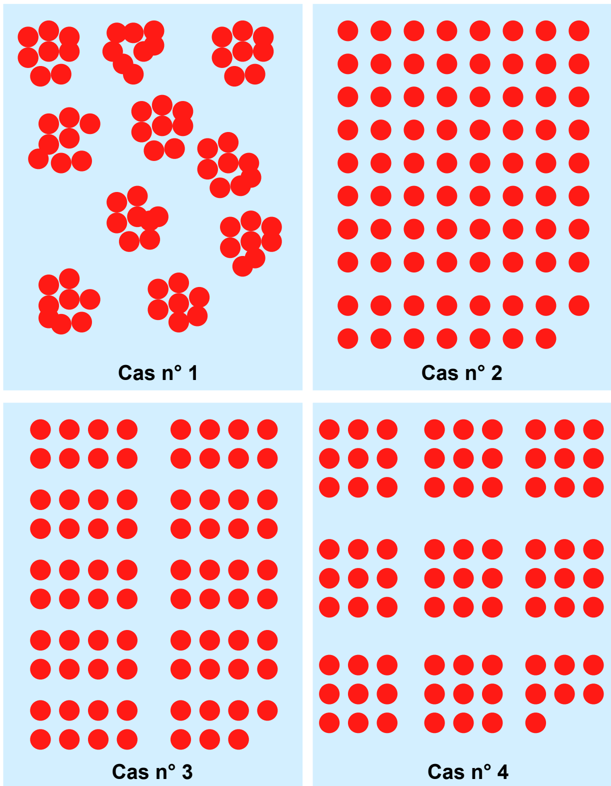
Le recours au groupement donne lieu à une manifestation primitive du concept de multiplication**.** La **multiplication** est de nature **bidimensionnelle,** contrairement à l'**addition,** qui est une opération **strictement linéaire** et donc unidimensionnelle. En effet, pour mémoriser une collection représentée au moyen du groupement, l'élève doit non seulement se souvenir du **nombre d'éléments contenus dans chaque groupe** (*g*), mais aussi du **nombre de groupes** (*n*) qui ont été formés (pour *n* x *g* éléments à mémoriser). La multiplication donne à l'arithmétique conventionnelle des possibilités nouvelles, au point d'en devenir la « colonne vertébrale ». L'Étape 2 marque la transition de l'arithmétique additive à l'arithmétique multiplicative.

Groupements visuels récurrents

Vu les limites de la subitisation, certaines dispositions sont plus faciles à visualiser que d'autres. Cet aspect joue ici encore un rôle capital. Dans ce contexte, nous ajoutons deux critères de visibilité aux deux premiers, ci-dessus énoncés :

3. Disposition régulière des éléments de chaque groupe **(subitisation structurelle);**
4. Disposition identique des regroupements à tous les niveaux **(récurrence).**

L'illustration ci-contre présente quatre arrangements intéressants pour représenter le nombre 79. Le cas n° 1 montre une solution primitive assez typique, en début de 2e année, dans laquelle il est difficile de déterminer la numérosité de chaque groupe. Le cas n° 2 illustre bien la nature « rectangulaire » de la multiplication, mais il faut recompter les côtés de l'arrangement. Le cas n° 3 est beaucoup plus facile à visualiser, mais pas autant que le cas n° 4, qui applique tous les principes, permettant ainsi une mémorisation quasi instantanée. L'élève doit découvrir et exprimer ce qui rend une collection facile ou difficile à mémoriser. À ce stade-ci, le groupement par dix n'est pas indispensable pour que l'élève démontre sa maîtrise du groupement; le compte par dizaines sera éventuellement favorisé, par convention, en raison de sa domination culturelle.



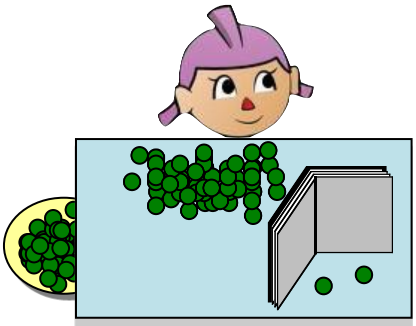
Expressions multiplicatives verbales et symbolisation

Bénéficiant désormais d'un langage numérique de plus en plus subtil et ayant exploité les avantages de la symbolisation, à l'Étape 1, l'élève peut désormais enrichir ses perceptions numériques au moyen d'une vaste gamme d'expressions multiplicatives qui vont l'aider à représenter des nombres de plus en plus grands. Voici une liste non exhaustive de telles expressions orales ou symboliques : 4 par 5, 4 groupes de 5, 4 rangées de 5, 4 x 5, 4 semaines, 4 douzaines, quatre-vingts (oralement), sans oublier des expressions mixtes comme 4 semaines et 5 jours, 4 centaines + 5 dizaines, quatre-vingt-seize (oralement), etc.

Note importante : Pour aider l'élève à établir une **image mentale** féconde de la multiplication, nous favorisons la **représentation rectangulaire** qui se lit : « ***n* PAR *m* ».** De plus, pour la lecture de l'expression 3 x 4, nous suggérons de favoriser **3 PAR 4,** de préférence à « 3 paquets de 4 » ou autres **expressions d'addition répétée** qui expriment moins bien la **nature commutative de la multiplication**[26]**.**

À l'Étape 2, les performances de l'élève demeurent lourdement ralenties par l'omniprésence des unités à énumérer. Cet inconvénient doit régulièrement être souligné par l'orthopédagogue durant les activités, afin de préparer l'éventuel passage à l'Étape 3.

Scénario d'évaluation : Étape 2



Matériel requis

- Au moins 50 jetons identiques (et 400 autres, en réserve);
- Un écran (par exemple, un livre à couverture rigide);
- Matériel structuré d'énumération disponible sur Internet.

Sur la table, devant l'élève, disposez le matériel comme dans l'illustration ci-contre (placez la réserve de jetons sous la table).

Présentation de la tâche

Proposez une nouvelle occasion de jouer à faire semblant. Les jetons représentent les moutons de l'empereur Malcommode. L'élève personnifie la bergère ou le berger à qui l'empereur désire confier ses bêtes, puisqu'il faut les conduire dans les riches pâturages qui se trouvent loin de la Cité impériale. Les ordres de l'empereur sont clairs : « *Tu dois ramener tous mes moutons! En guise de salaire, je t'en remettrai un au retour. S'il en manque un seul, oublie le salaire et je serai… très fâché!* »

Consigne à l'élève (placez à sa disposition et en vrac un lot de 50 jetons) : « *Faisons semblant que ce sont les moutons de l'empereur Malcommode. Durant ton voyage de quelques semaines, il te faudra dormir. Durant la nuit, il arrive que des moutons se cachent dans les bosquets.* » Soulevez le livre pour montrer les deux moutons qui sont cachés. « *Alors, au réveil, tu dois toujours pouvoir t'assurer que toutes les bêtes sont réunies. As-tu une idée comment faire, sans y passer toute la journée?* »

Replacez tous les jetons dans le lot et proposez à l'élève un bon entraînement avant de remplir sa mission. **Aucune allusion au comptage ou à quelque stratégie que ce soit ne doit être formulée.** Rejetez toute tentative de construction d'enclos, solution irréaliste, dans les circonstances. Après avoir laissé l'élève réfléchir et possiblement organiser son troupeau, décrétez qu'il fait nuit et invitez l'élève à se retourner. Cachez 6 jetons derrière le livre et laissez l'élève découvrir combien de moutons sont disparus. Après deux essais réussis, ajoutez une trentaine de jetons et poursuivez l'évaluation.

[26] Puisque 3 paquets de 4 ne représente pas la même réalité que 4 paquets de 3, l'enseignement primaire a souvent développé la fausse notion voulant que « 3 paquets de 4 » doive être symbolisé par 3 x 4 et non 4 x 3. Il faut voir ici une conséquence malheureuse du choix de l'image mentale non commutative « __ paquets de __ » pour fonder le sens de la multiplication. Le choix de l'arrangement rectangulaire comme image mentale intuitive est mieux inspiré et surtout plus fécond pour illustrer les différentes propriétés de la multiplication, de l'arithmétique élémentaire jusqu'à l'algèbre. Pour une présentation complète en ce sens, voir *Défi mathématique 2 (Guide d'enseignement),* module *Jeux de nombres,* Michel Lyons et Robert Lyons, Édition Chenelière Éducation, pages 10 à 19.

Si l'élève ne recourt pas *spontanément* au groupement, cachez une quarantaine de jetons. Compliquez la tâche en ajoutant une contrainte de temps : « *S'il faut trop de temps pour rassembler le troupeau, tu ne pourras pas les mener jusqu'aux pâturages…* » Éventuellement, accordez au plus 20 secondes pour décourager toute stratégie d'énumération. Appliquez aussi les contraintes suivantes :

- Dès que l'élève pense à grouper, cachez au moins un groupe et quelques moutons.
- Dès que l'élève pense à compter les groupes et les unités, chambardez les jetons après en avoir retiré plusieurs. Promettez ensuite de ne plus recommencer, en précisant cependant : « *Il s'agit seulement d'une pratique, mais dans la réalité, les moutons se déplaceraient…* »
- Ajoutez parfois un ou plusieurs jetons représentant des petits, nés durant la nuit.
- Quand l'élève parvient à mémoriser convenablement une collection d'une centaine de jetons, introduisez le **matériel structuré d'énumération 1,** afin d'augmenter le nombre de moutons jusqu'à au moins 400. Il est important d'introduire ce matériel **au moment opportun,** uniquement pour **réduire le temps** consacré à regrouper les unités. Ne chambardez plus les jetons.

L'élève qui maîtrise la présente étape **forme spontanément et de façon très visuelle des groupes et des groupes de groupes** afin de mémoriser une collection d'au moins 400 jetons. Après avoir quitté la collection des yeux, l'élève peut ensuite **rapidement découvrir le nombre de jetons manquants (ou ajoutés).** L'élève sait aussi interpréter ou reconnaître des **expressions multiplicatives orales ou écrites** décrivant de grands ensembles. Enfin, le **dénombrement verbal par chaînes groupées** est maîtrisé.

Il était une fois : le groupement

Dans l'histoire des numérations, le recours au groupement est très certainement hérité de la faculté de **subitisation structurelle.** La plus ancienne évidence archéologique d'un recours au groupement remonte à environ 15 000 ans. Il s'agit d'un radius de loup présentant 11 groupes de 5 entailles chacun.

Les types de groupement qui ont jadis été utilisés ont souvent rapport au support utilisé pour compter : 5 ou 10 (doigts de la main) et 20 (doigts et orteils) étant les plus populaires. L'idée de grouper par 5 peut également tirer son origine des limites de la subitisation perceptuelle (3 ou 4). Le groupement est aussi parfois relié à l'usage auquel le compte était destiné : 12 (mesures concrètes) ou 60 (mesure de temps, d'angle...). En ce qui concerne le nombre 12, nos lointains ancêtres l'ont vite considéré comme « magique ». Douze est en effet le premier nombre qui soit à la fois divisible par 2, 3 et 4, ce qui s'avère fort commode au moment de réaliser des mesures temps, de longueur, de capacité liquide, etc. De plus, on retrouve le nombre 12 sur les phalanges de la main (sans le pouce), un hasard morphologique qui a dû contribuer au statut spécial accordé à ce nombre. Quant au groupement par 60, il a été d'abord adopté par les savants astronomes mésopotamiens. Sa divisibilité par 2, 3, 4, 5 et 6 peut en bonne partie expliquer ce choix. Les mesures modernes d'angles et de temps ont d'ailleurs conservé cet héritage lointain d'une base qui peut paraître trop grande, à première vue.

Quoi faire pour aider?

Les suggestions d'activités qui suivent permettent d'aider l'élève en vue de l'acquisition du groupement récurrent et de la multiplication, comme stratégie de mémorisation des grandes numérosités.

Activité 1 : Oisillons extrêmes

Matériel requis

- Oisillons 1 à 24;
- Document d'accompagnement.

Une pie pleure sur le sort de ses petits : « *À chaque repas, c'est la même crise! S'il m'arrive de ne pas déposer exactement la même quantité de nourriture à chacun de mes oisillons, ils se chamaillent, ils se bousculent. Un jour, certains vont finir par tomber du nid... Je ne sais quoi faire pour éviter ça.* »

Pour démarrer l'activité, on place sur le plancher des jetons qui représentent les graines. Le nid et les oisillons libres sont déposés sur une table située un peu plus loin (pour éviter que l'élève ne les voie en même temps que les graines à rapporter). Le défi consiste à toujours rapporter suffisamment de nourriture pour que chaque oisillon mange autant que les autres. Sinon, il y aura du grabuge! Et cette pauvre pie, qui ne sait pas compter! **Laissez à l'élève suffisamment de temps pour ressentir la pertinence du groupement subitisable** avant de faire ce lien avec l'Étape B, en cas de blocage.

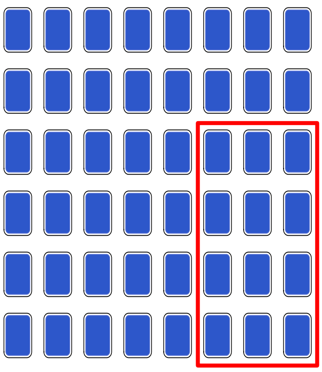
Soumettez d'abord le cas du nid à 4 oisillons (voir le cas n° 1). Ce cas est facile à résoudre, par subitisation. Proposez ensuite un cas plus complexe (voir le cas n° 24) pour illustrer à quel point la tâche peut devenir ardue. Poursuivez avec les nids n° 2 et suivants. L'élève devrait parvenir sans trop de peine à réussir le cas n° 2. Au nid n° 3, dites : « *À un moment donné, les oisillons se sont trouvés dans cette position élégante... Profitons-en pour les photographier afin d'aller chercher les graines qu'il faut* ». Dans les cas n^{os} 23, 24, et d'autres de plus en plus difficiles que vous pouvez soumettre, l'élève devrait former des groupes.

Si l'enfant répond au hasard, sans chercher à compter les oisillons, passez à l'évaluation de l'Étape 1. Si l'enfant réussit en dénombrant *un à un* les oiseaux, signalez que cette méthode est bonne, mais hors de portée de la pie, qui ne sait pas compter… Idéalement, l'élève devrait fidèlement reproduire la disposition des groupes d'oisillons avec les jetons qui représentent les graines. Sinon, suggérez de mémoriser la situation **« en faisant comme si tu prenais des photos, dans ta tête »**. Invitez l'élève à **décrire verbalement l'arrangement** à mémoriser, par ex. : 1 petit triangle et 2 carrés, 2 carrés de largeur 3, 1 rectangle 2 PAR 3 ou 3 PAR 2, etc. Au besoin, introduisez vous-mêmes ces descriptions.

Activité 2 : Stationnement sous surveillance

Matériel requis

- Un jeu de cartes ordinaire;
- Stationnement 1 à 12.

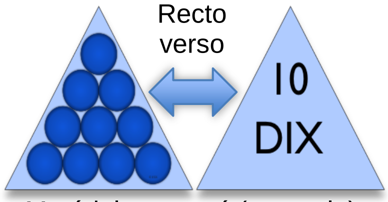


Disposez les cartes comme dans l'illustration ci-contre.

Consignes à l'élève : « Imagine que ceci est un parc de stationnement rempli d'automobiles dont tu as la garde. Certaines vont aller et venir et tu devras toujours savoir en faire le compte.

L'élève se retourne et vous retirez des cartes (par exemple, celles qui sont encadrées ci-contre). Exigez surtout une réponse utilisant des expressions multiplicatives. Pour la suite, inspirez-vous des autres cas proposés dans le document d'accompagnement.

Activité 3 : Les joyaux de Sa Majesté



Matériel structuré (exemple)

Matériel requis

- Au moins 50 jetons identiques (et 400 autres, en réserve);
- Matériel structuré d'énumération disponible sur Internet;
- Chronomètre.

Note importante : Avant de présenter l'activité 3, assurez-vous d'avoir complété les deux qui précèdent, afin que l'élève puisse transférer ses apprentissages au moment de tenir les joyaux à l'œil.

L'élève se voit confier la garde des joyaux de l'empereur Malcommode, soit un lot d'au moins 70 jetons identiques qui représentent des diamants. Un garde malhonnête l'accompagne en tout temps pour veiller sur le précieux trésor. Le garde honnête soupçonne l'autre de subtiliser furtivement des diamants pendant qu'il fait la sieste (le garde honnête doit tourner le dos au trésor pour permettre à l'autre de commettre son larcin). Malheureusement, le garde honnête **ne sait pas compter.** Comment peut-il tout de même protéger le trésor? Après quelques cas sans contrainte, le garde honnête ne disposera que de 45 secondes pour porter une accusation après s'être retourné. Abaissez progressivement la contrainte à 20 secondes, moins si possible.

Les règles suivantes s'appliquent :

- Si le nombre **exact** de joyaux dérobés est découvert, le garde malhonnête reçoit **un blâme.**
- Si le nombre mentionné est **inférieur** à celui du larcin, le garde malhonnête remet dans le lot du trésor uniquement ce nombre de pièces. Il conserve les autres et ne reçoit **aucun blâme.**
- Si le nombre mentionné est **supérieur** à celui du larcin, le garde malhonnête garde toutes les pièces subtilisées et ne reçoit **aucun blâme.**
- Après 2 blâmes consécutifs, le garde malhonnête compte le nombre de diamants subtilisés. Les rôles sont ensuite inversés. L'orthopédagogue peut profiter de cette situation pour servir de modèle en adoptant une stratégie efficace.
- Le garde qui a pu s'emparer du plus grand nombre de diamants gagne la partie.

Pour démontrer sa compétence, l'élève qui personnifie le garde honnête doit parvenir à établir un système efficace lui permettant de décrire précisément chaque « retrait » effectué par le garde malhonnête. Ici encore, l'élève n'a d'autre choix que de prendre la collection de diamants en photo! Cependant, la disposition préalable des jetons doit respecter les critères les plus stricts de la **subitisation structurelle.** Encouragez l'élève à exprimer clairement son système et à verbaliser les images mentales utilisées au moyen d'expressions multiplicatives.

Appliquez les mêmes contraintes que celles qui sont imposées dans le scénario d'évaluation :

- Cachez des groupes et des diamants.
- Chambardez parfois tous les groupes formés (avec vos plates excuses…)
- Ajoutez parfois des diamants représentant un ajout au trésor fait pendant sa sieste…
- Quand l'élève parvient à mémoriser convenablement une collection d'une centaine de diamants, introduisez le **matériel structuré d'énumération 1** (au choix, selon les dispositions préférées de l'élève), afin d'augmenter le nombre de diamants au moins jusqu'à 400. Il est important d'**introduire le matériel structuré au moment opportun,** uniquement pour **réduire le temps** consacré à simplement regrouper les unités.
- Si l'élève compte les diamants un à un, retournez les pièces groupées côté verso (où il est noté *10* et *Dix*) pour stimuler le dénombrement verbal par chaînes groupées. Cette stratégie prépare également le passage à l'Étape 3.

En jouant le rôle du garde honnête, choisissez des **agencements différents** de ceux utilisés par l'élève, dans le matériel structuré d'énumération.

Étape 3 : Équivalence et multiples représentations

Quelle est la pertinence de passer à l'Étape 3? Le groupement des unités facilite la mémorisation d'une collection contenant de très nombreux éléments. Cependant, cette stratégie atteint ses limites au-delà de quelques centaines d'unités, à cause de sa lourdeur. Le besoin d'un nouveau saut cognitif se fait sentir : il s'agit de remplacer les groupes et les groupes de groupes par des **unités d'ordre supérieur.** Ce passage du paradigme de l'**énumération** à celui de la **numération** repose sur le concept sous-jacent d'**équivalence,** qui procure désormais une stratégie de mémorisation des nombres quasi illimitée en plus d'**éliminer presque complètement le recours au dénombrement un à un.**

Pour l'élève, ce changement de paradigme implique un tournant majeur dans sa perception du nombre. Dorénavant, pour établir la valeur d'une représentation numérique, il faudra faire comme si telle forme contenait tant de fois telle autre, et ainsi de suite. En guise d'exemple, imaginons un voyageur sortant d'un bureau de change, à peine arrivé dans un pays étranger. Les premières préoccupations de ce touriste face à un système monétaire inconnu le ramènent plus ou moins à la présente étape d'apprentissage. Ainsi, au moment de régler sa première course de taxi, le voyageur doit répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'unité monétaire de ce pays?
- Quelle est la valeur relative de chaque type pièce ou billet que je possède?
- Ai-je la somme qu'il faut pour payer cette course de taxi?

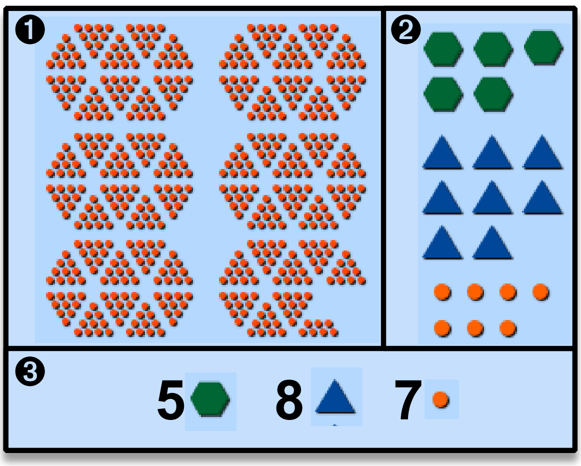
L'Étape 3 exige que l'élève utilise la **numération de forme** de façon compétente. Ce nouveau mode de représentation des nombres comporte les caractéristiques suivantes :

1. Des **unités d'ordre supérieur** sont utilisées pour représenter des groupes d'unités ainsi que des groupes de groupes. C'est l'idée de **récurrence.**
2. Des formes ou des signes **faisant simplement l'objet d'une convention** sont utilisés pour représenter les unités des divers ordres du système de numération; les **dimensions relatives** des formes ou signes utilisées n'ont **aucune importance.**
3. Des **règles d'équivalence** sont établies entre les diverses unités.

La monnaie, les blocs de base dix, les chiffres romains ou égyptiens sont des exemples de **numération de forme** où la valeur des diverses unités dépend des objets ou des signes qui les représentent. Les abaques, les bouliers et la numération décimale moderne sont des exemples de **numération de position.** La **numération de forme** précède historiquement et conceptuellement la **numération de position** et s'en distingue par un **mode moins abstrait de désignation des valeurs relatives des unités.**

À l'Étape 3, nous suggérons donc fortement de prioriser le recours à la numération de forme, un support infiniment plus simple pour intégrer et appliquer toutes les **subtilités de l'équivalence.** Ensuite, le transfert de compréhension vers la numération de position sera simplifié d'autant.

La figure ci-contre illustre le passage de l'énumération ❶ à une numération de forme additive ❷. Le recours à des expressions multiplicatives va permettre de simplifier la notation ❸, avant de passer à la numération de position décimale moderne (587). Cette progression reflète l'évolution conceptuelle et historique de l'énumération vers la numération.



De l'énumération à la numération

Avec l'entrée en scène du concept d'équivalence, **un même nombre peut dorénavant être représenté de multiples façons.** Ainsi, dans l'exemple ci-dessus du nombre 587, il devient possible de remplacer 1 hexagone (centaine) par 10 triangles (dizaines), puis 2 triangles par 20 jetons (unités), etc. sans changer la valeur du nombre représenté. Dans le même ordre d'idée, les 5 décompositions qui suivent sont des **formes équivalentes et toutes parfaitement légitimes du nombre 587 :**

- 5 centaines + 8 dizaines + 7 unités
- 5 centaines + 7 dizaines + 17 unités
- 4 centaines + 16 dizaines + 27 unités
- 1 centaine + 37 dizaines + 117 unités
- 53 dizaines + 57 unités

En introduisant le recours à des **règles d'échange,** la numération de forme engendre un véritable « monstre cognitif » : l'**équivalence.** Ce pilier de l'apprentissage des mathématiques mérite amplement sa désignation terrifiante, puisqu'il constitue, pour la vaste majorité des élèves, le plus redoutable obstacle qui se dresse durant l'apprentissage des opérations mathématiques, toutes catégories de nombres confondues!

L'équivalence permet de changer la représentation, sans changer le nombre.

Scénario d'évaluation : Étape 3

Matériel requis

- Des pièces de monnaie canadienne, au moins 50 pièces de 1 ¢, 20 pièces de 10 ¢, 10 pièces de 25 ¢ et 3 de chaque autre dénomination;
- Ensemble de blocs de base dix (des centicubes, des bâtonnets à café et de vieilles cartes à jouer font parfaitement l'affaire);
- 1 compteur (facultatif).

Présentation de la tâche

Pour évaluer l'élève, la monnaie représente le matériel de numération le plus commode et le plus réaliste possible. Par ailleurs, les blocs de base dix constituent certes le **matériel de substitution** le plus universellement employé, en numération, à l'école. Nous recourrons donc abondamment à ces deux supports de représentation, dans les activités qui suivent.

Partie 1 : Équivalence concrète ou imagée

Consigne à l'élève (montrez les lots de pièces ci-dessous, deux à deux) : « *Quel ensemble de pièces représente le plus gros montant? Fais les échanges pour prouver ta réponse.* »

a)  **ou**  Réponse : 46 ¢ > 43 ¢

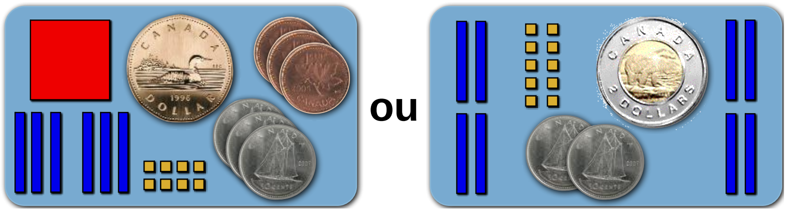
b)  **ou**  Réponse : Égalité

Des échanges appropriés doivent servir à justifier le choix de l'élève; le seul **calcul des valeurs,** par addition, **ne suffit pas.** De plus, l'élève doit au moins pouvoir associer la monnaie aux blocs de base dix en faisant semblant. **Les blocs de base dix sont l'extension des doigts,** pour des nombres plus grands! Pour la suite, prétextez le manque de vraies pièces de monnaie et suggérez de nouveau l'idée de faire semblant :

Consigne à l'élève : « *Nous allons utiliser les blocs de base dix et faire comme s'ils étaient de vraies pièces de monnaie. Pour cela, nous allons inventer un code* (voir ci-dessus). *Faisons comme si le cube-unité représentait la pièce de 1 ¢. Dans la réalité, le cube-unité est donc de couleur cuivre et il affiche une feuille d'érable sur le côté pile... Peux-tu imaginer cela? Fais de même avec les autres blocs.* »

Réponse : La bande, pièce de 10 ¢, argent et voilier; la plaque, pièce de 1 $; or et huard.

Poursuivez en rappelant les mêmes consignes que pour les cas a et b. L'élève doit toujours **effectuer concrètement et justifier tous ses échanges.**

c) 

Réponse : 301 ¢ ou 3,01 $ vs 310 ¢ ou 3,10 $.

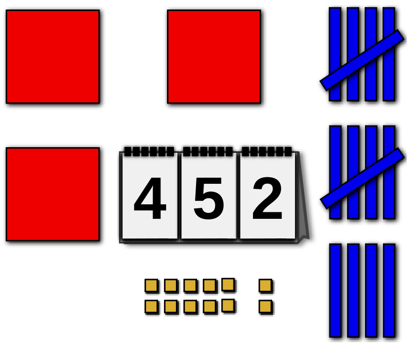
Partie 2 : Multiples représentations

L'élève utilise les blocs de base dix et tente de reconstituer un **nombre présenté oralement, sous forme de décomposition.**

Consigne à l'élève : « *Dans ma tête, je vois un nombre, mais il est pas mal chambardé… Essaie de le retrouver en utilisant les blocs de base dix, au fur et à mesure que je t'en fais la description. Affiche le nombre que tu obtiens sur ton compteur.* »

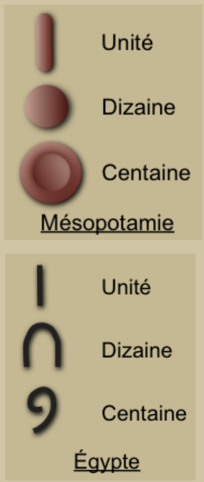
Proposez les cas suivants, pour vérifier la compréhension de la numération, de l'équivalence après échanges et des opérations de base :

a) Il y a 3 centaines, 12 unités et 14 dizaines. Réponse : 452.
b) Il faut partir de 5 centaines et lui enlever 4 unités. Réponse : 496.
c) Tu dois réunir 3 lots identiques, contenant chacun 2 centaines, 4 dizaines et 6 unités. Réponse : 738.
d) Prends 5 centaines et distribue-les également aux quatre coins de la table; le nombre se trouve dans le coin en haut, à gauche. Réponse : 125.



À l'Étape 3, pour montrer sa compétence, l'élève doit **comparer des lots de pièces de monnaie exigeant des échanges**. L'élève doit également recourir aux blocs de base dix, comme **matériel de substitution** à la monnaie ou à toute autre valeur numérique rencontrée dans des situations de problèmes variées. La maîtrise du concept d'équivalence se manifeste également en reconnaissant l'**égalité de diverses représentations d'un nombre obtenues** suite à des échanges appropriés.

Il était une fois : la numération de forme

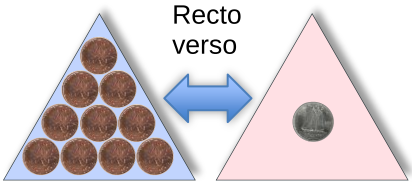


Les premières **numérations de forme** sont apparues en Mésopotamie, il y a environ 5 000 ans. Pour représenter les différents groupements, les comptables élamites utilisaient des jetons d'argile appelés *calculi* (voir ci-contre).

À peu près à la même époque et de façon indépendante, les scribes égyptiens inventèrent leur propre numération de forme. Les unités d'ordre supérieur y étaient représentées par des marques devenues de véritables *chiffres* (voir ci-contre).

Dès qu'ils se trouvèrent en possession de la numération de forme, les comptables et les scribes des premières civilisations purent développer des procédés de calcul pour les quatre opérations.
La porte de l'arithmétique se trouvait désormais grande ouverte.

Quoi faire pour aider?



Matériel structuré

Matériel requis

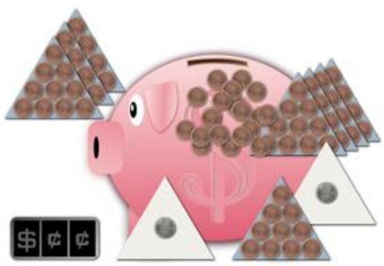
- Au moins 130 pièces de 1 ¢ et 20 pièces de 10 ¢;
- Matériel structuré Monnaie disponible sur Internet;
- 1 compteur (facultatif);
- Circulaires de magasins d'alimentation.

Les suggestions d'activités qui suivent permettent d'aider l'élève à maîtriser l'équivalence, une assise incontournable de la numération. Utilisez la **monnaie comme contexte principal** et les **blocs de base dix, comme matériel de substitution.**

Activité 1 : Tirelire

Consigne à l'élève : « *Imagine que tu viens de vider ta tirelire qui contenait toutes ces pièces de 1 ¢. Tu arrives au dépanneur pour échanger le tout contre des pièces de plus grande valeur. Auparavant, je te demande de placer tes pièces pour que l'échange soit* ***facile à voir.*** *Affiche aussi le montant total sur le compteur.* »

a) Pour le premier cas, éparpillez 48 pièces de 1 ¢. À moins que l'élève ne soit déjà à l'aise avec les diverses pièces de monnaie, n'échangez que des pièces de 10 ¢.
b) Reprenez le même scénario avec 127 pièces de 1 ¢. Si l'élève manipule les groupements avec compétences, remplacez le premier groupe de pièces réelles par un triangle recto verso (voir l'illustration ci-dessus) du matériel structuré et présentez l'échange possible pour une pièce de 10 ¢, par simple retournement.
c) Proposez ensuite des cas valant au moins 3 $, avec des pièces libres ou structurées, certains déjà retournés (voir ci-contre). Introduisez la pièce de 1 $ en utilisant le matériel structuré et simulez de nouveau l'équivalence par retournement d'un triangle de dix pièces de 10 ¢.



Notes importantes :

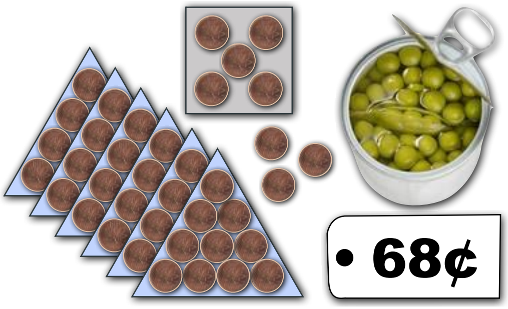
1. Devant tout échange, l'élève doit reconnaître qu'il y a égalité de valeur. Cependant, d'un point de vue pratique, il est normal de préférer le plus petit lot de pièces possible.
2. Associez au plus tôt le total en cents (¢) et son équivalent en dollars ($). Rappelez que la valeur utilisée aux centaines de cents (¢) est aussi celle des dollars ($).
3. Quand l'élève manipule aisément les pièces de 1 $, 10 ¢ et 1 ¢, introduisez les autres pièces du matériel structuré ainsi que leur équivalence, par retournement.

Activité 2 : Plus ça change, plus c’est pareil!

Partez d’un cas concret dans une circulaire de magasin d’alimentation et suggérez le paiement d’un article, comme dans l’illustration ci-dessous. Toutes les autres pièces de monnaie du matériel structuré sont également mises à la disposition de l’élève.

Consigne à l’élève : « *Voici une façon un peu “lourde” de payer cette boîte de petits pois. D’autres façons existent, avec des pièces différentes. Explique tous tes échanges.* »

L’élève commence avec le lot proposé et retourne les formes afin de faire des échanges de pièces équivalentes. Exigez au moins 5 ou 6 solutions différentes. Des justifications sont requises.



Proposez d’autres situations en augmentant progressivement le nombre de pièces de 1 ¢ jusqu’à au moins 4 $. Insérez parfois une ou plusieurs pièces réelles, afin de laisser éventuellement de côté le matériel structuré.

Activité 3 : Problèmes d’application

Proposez des problèmes variés de consommation courante. L’élève utilise tantôt des pièces de monnaie (matériel structuré), tantôt des blocs de base dix ou une combinaison des deux pour effectuer ses calculs. Demandez toujours à l’élève de justifier ses échanges.

Activité 4 : Portrait de nombres et décompositions

Voici un exemple de tableau pour établir le **portrait du nombre 64.** Il comporte 7 différentes possibilités, toutes équivalentes au nombre 64. Le travail peut être amorcé avec les blocs de base dix, jusqu’à ce que l’élève perçoive les régularités et remplisse le tableau. De tels exercices devraient être fréquemment proposés à cette étape.

Portrait de 64	
6 dizaine(s)	4 unité(s)
5 dizaine(s)	14 unité(s)
4 dizaine(s)	24 unité(s)
3 dizaine(s)	34 unité(s)
2 dizaine(s)	44 unité(s)
1 dizaine(s)	54 unité(s)
0 dizaine(s)	64 unité(s)

Proposez aussi de découvrir des nombres qui sont « dans votre tête », à la même manière de la partie 2 de l’évaluation, au début de cette section. L’élève doit suivre la description au fur et à mesure **avec ses blocs de base dix** et afficher le nombre obtenu sur son compteur.

Les cas peuvent également être proposés à l’écrit. Voici quelques exemples types :

a) 4 unités + 8 centaines + 5 dizaines = ____ Réponse : 854

b) 2 centaines + 11 dizaines + 23 unités = ____ Réponse : 333

c) 6 centaines + __ dizaines + 7 unités = 827 Réponse : 22

d) 4 dizaines + 5 unités + 11 dizaines + 4 centaines + 8 unités = ____ Réponse : 563

e) 5 centaines – 3 dizaines – 2 unités = ____ Réponse : 468

f) 6 dizaines + 145 – 9 unités + 4 centaines = ____ Réponse : 596

g) 3 x 4 dizaines + 2 x 8 unités + 4 x 2 centaines = ____ Réponse : 936

h) 4 x (1 centaine + 3 dizaines + 9 unités) = ____ Réponse : 556

i) $\frac{\text{9 centaines + 5 dizaines + 2 unités}}{4}$ = ____ Réponse : 238

j) $\frac{\text{7 centaines}}{4}$ + $\frac{\text{5 dizaines}}{2}$ + $\frac{\text{12 unités}}{3}$ = ____ Réponse : 204

Étape 4 : Meilleure représentation et symbolisation dynamique

Quelle est la pertinence de passer à l'Étape 4? L'équivalence permet de représenter tout nombre de multiples façons. Cependant, **au moment d'opérer,** l'intérêt de cet éventail quasi illimité de décompositions rétrécit au point qu'il faille plutôt rechercher **LA représentation idéale,** celle qui rendra « facile » un calcul d'abord perçu comme « difficile ». Quand une certaine **productivité de calcul** est requise, les blocs de base dix deviennent à leur tour encombrants. L'**abaque élémentaire** constitue alors un outil beaucoup plus **fécond.**

La complexité du recours à l'équivalence atteint son point culminant au moment d'effectuer certains calculs que les élèves perçoivent souvent comme « difficiles ». Le tableau ci-dessous permet d'expliciter cette perception en présentant deux cas types, pour chaque opération. Précisons d'abord que **la difficulté relative d'un calcul dépend davantage de la représentation des nombres utilisés que de leur grandeur.** En effet, l'enfant de 6 ans n'hésitera pas à affirmer que : « Un million plus un million égale deux millions! », mais il éprouvera d'importantes difficultés avec 9 + 7… De plus, l'addition et la multiplication sont globalement perçues comme étant « moins difficiles » que la soustraction et surtout la division. Cette différence est due au fait que l'**addition** et la **multiplication** réclament la recherche d'une meilleure représentation **après** que le calcul ait été effectué, tandis que **la soustraction et la division** imposent la plupart du temps cette obligation **avant** d'amorcer le calcul de l'opération proprement dite, ce qui exige le recours à l'**anticipation.** Pour aider l'élève à développer ses compétences à calculer, nous proposons de respecter l'**évolution historique** de cette importante conquête du cerveau humain. Puisque les premiers comptables de l'Histoire ont perçu, puis automatisé les **principes opératoires de base** grâce au **calcul concret,** il semble logique de permettre à l'élève de développer sa **compréhension**, dans un **environnement tactile et visuel** lui offrant la même opportunité.[27]

Opération	Facile	Difficile
Addition	521 + 176	294 + 58
Multiplication	4 x 122	3 x 87
Soustraction	987 – 435	201 - 82
Division	848 ÷ 4	201 ÷ 3

Le **calcul concret** succède aux comptes basés sur l'**énumération** (Étapes A, B, 1 et 2) et précède le **calcul mental** (Étape 5). Le calcul concret devrait être amorcé dans un contexte pratique avec la monnaie et les blocs de base dix (Étape 3), avant **d'en transférer la compréhension sur l'abaque élémentaire.** À l'école, l'abaque élémentaire représente l'outil idéal du calcul concret, mais il devrait être introduit comme un **support simple et commode de substitution aux blocs de base dix.** La **notation des démarches** suivies sur l'abaque donne naissance aux techniques de **calcul écrit** (Étape 5). **Tout comme le calcul mental, le calcul concret fait appel aux aires de la vision globale du cerveau.** Par opposition, **le calcul écrit sollicite les aires séquentielles du langage et de l'audition.**

Historiquement, l'abaque est certes l'outil de calcul concret ayant été le plus utilisé. On retrouve encore aujourd'hui divers types de bouliers en Asie, où les performances en calcul des élèves sont les meilleures au monde. Après que l'élève ait démontré sa compétence à utiliser les blocs de base dix, **le passage à l'abaque devient une façon encore plus abstraite de faire comme si…** L'illustration ci-dessous montre quelques **représentations équivalentes du nombre 456 sur la planche à calcul,** le type d'abaque élémentaire que

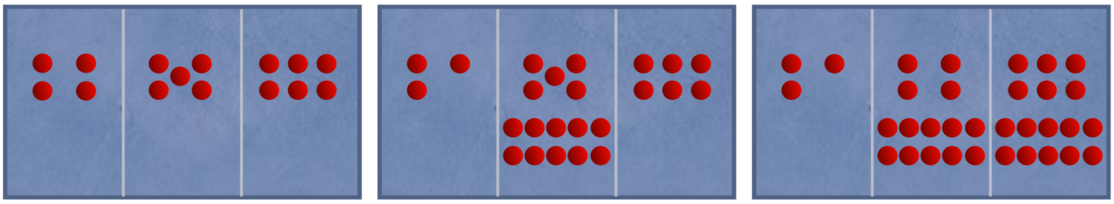
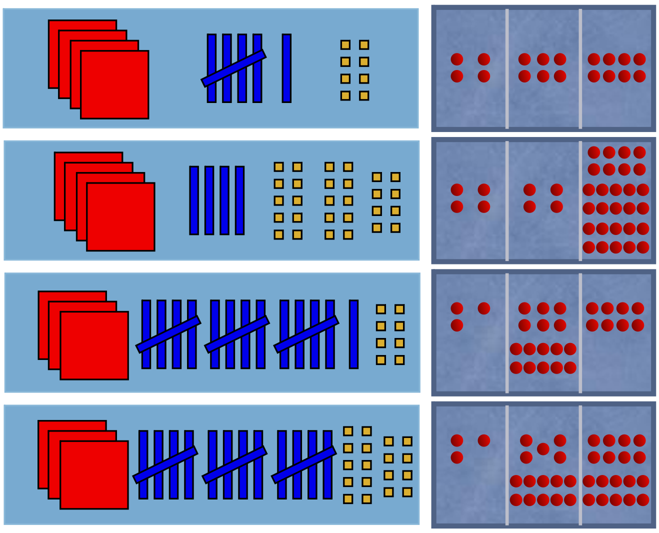


Planche à calcul : Représentations équivalentes du nombre 456

[27] Cette approche permet à l'élève de créer des procédés « personnels » de calcul, comme le propose pertinemment le programme de formation en mathématiques du Québec.

Exemples de la meilleure représentation, avec blocs de base dix et planche à calcul

Voici 4 représentations équivalentes du nombre **468** recourant aux blocs de base dix et leur équivalent, sur la planche à calcul. Pour chacune, nous décrivons ci-dessous une ou plusieurs situations pour lesquelles elle serait **la meilleure.**



La représentation ❶est la meilleure, s'il faut effectuer :

- **468 – 253** (il y a **suffisamment d'unités de chaque ordre**);
- **468 ÷ 2** (le nombre de chaque ordre d'unité est **divisible par 2**);
- et pour afficher ce nombre sous sa **forme la plus économique.**

En calculant concrètement **3 × 156,** on obtient **3 centaines, 15 dizaines et 18 unités.** Cette représentation n'est pas **la plus économique,** vu que des échanges sont encore possibles. La **meilleure représentation** exige ici une simplification résultant d'échanges appropriés. En effectuant **249 + 219,** on obtient **4 centaines, 5 dizaines et 18 unités.** Le même raisonnement s'applique et démontre la **proximité de l'addition et de l'addition répétée.**

La représentation ❷est la meilleure, s'il faut effectuer :

- **468 ÷ 4** (le nombre affiché à chaque position est le **multiple de 4 minimal requis**).

S'il fallait effectuer **468 ÷ 2,** la représentation ❷ ne serait pas la meilleure. Bien que le nombre affiché à chaque position soit un nombre pair, celui des unités n'est pas « minimal ». En effet, si on fait la division, on obtient : **2 centaines, 2 dizaines et… 14 unités!** Un échange supplémentaire est donc nécessaire pour obtenir le résultat (234), ce qui correspond à la forme la plus économique. Comme mentionné ci-dessus, pour l'opération **468 ÷ 2,** la représentation ❶était la meilleure, considérant le **nombre d'étapes à exécuter.**

La représentation ❸est la meilleure, s'il faut effectuer :

- **468 – 295** (le nombre affiché à chaque position est **suffisant et minimal**).

La représentation ❹est la meilleure, s'il faut effectuer :

- **468 – 179** (le nombre affiché à chaque position est **suffisant et minimal**);

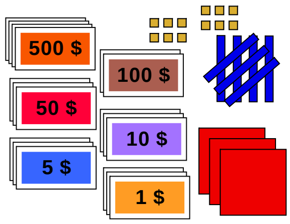
- **468 ÷ 3** (le nombre affiché à chaque position est le **multiple de 3 minimal requis**).

La **meilleure représentation** d'un nombre dépend de ce que l'on **désire faire avec ce nombre.** Chaque calcul impose donc ses critères particuliers, bien que les principes propres à chaque opération de base reviennent généralement à ceux décrits dans les cas ci-dessus.

À ce stade-ci, l'élève doit également apprendre à **noter par écrit la démarche opératoire** suivie sur la planche à calcul. Nous suggérons d'introduire l'idée de **garder trace des étapes** de la démarche d'un calcul, pour les mêmes raisons qu'il est utile de le faire **pour toute démarche de résolution de problème.** Pour une présentation complète du processus de **symbolisation dynamique** pour les quatre opérations, consultez l'Activité 4 ci-dessous.

À l'Étape 4, l'élève devient habile à **identifier la meilleure représentation d'un nombre en situation de calcul concret** sur la planche à calcul. La **symbolisation dynamique** permet de **garder trace de la démarche** suivie pour faire un calcul, ce qui en facilite la **vérification**.

Scénario d'évaluation : Étape 4



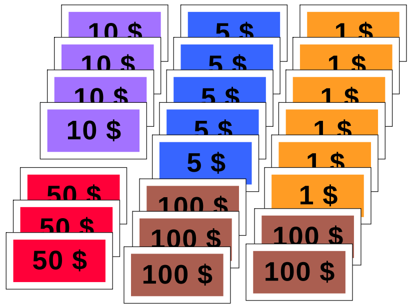
Matériel requis

- Argent jouet, avec des billets de dénominations variées[28];
- Des blocs de base dix.

Présentation de la tâche

Puisqu'il est possible que l'élève ne connaisse pas la planche à calcul, nous ne l'utilisons pas pour cette évaluation. Nous recourrons à la monnaie pour vérifier l'idée de meilleure représentation et l'élève pourra utiliser en tout temps les blocs de base dix, en parallèle. La première partie de la tâche permet de confirmer l'atteinte de l'étape précédente tout en établissant le contexte pratique de la présente étape incontournable.

Partie 1 : Meilleure représentation



Remettez pêle-mêle à l'élève les billets illustrés ci-contre, dont la somme est de 721 $.

Consignes à l'élève : « *Imagine que ceci est l'argent recueilli lors d'un spectacle à l'école. Trouve la somme qui a été recueillie grâce à cette soirée.* »

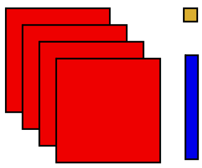
Pour montrer sa **compréhension préalable,** l'élève doit :

- Classer les billets selon leur valeur;
- Compter juste en expliquant les échanges appropriés, sans tenir compte des erreurs d'inattention.

Nous poursuivons l'installation du scénario afin de préparer l'évaluation plus formelle qui suivra. Sur la table, disposez tout l'argent jouet pour former un semblant de tiroir-caisse.

Consignes à l'élève (en lui remettant 411 $) : « *Voici l'argent qui se trouve actuellement dans ton portefeuille. Ton ami(e) désire vendre sa bicyclette et tu as accepté de l'acheter au prix de 160 $. Avec l'argent que tu possèdes dans ton portefeuille, il sera impossible de faire le paiement exact, parce que ton amie(e) n'a pas de monnaie. Fais les échanges qu'il faut pour rendre ton paiement plus facile.* »

Jouez le rôle de la personne qui vend sa bicyclette et qui n'a pas de monnaie, pour que l'élève saisisse bien le problème du paiement « facile » dont il est question, dans ce scénario. Pour l'instant, ne recherchez pas nécessairement la meilleure représentation. Toute réponse permettant la remise directe de 160 $ est acceptable. Ainsi, si l'élève échange deux billets de 100 $ contre 2 billets de 50 $ et 10 billets de 10 $, approuvez cette solution.



Enlevez les billets et disposez les blocs de base dix sur la table. Refaites le même cas en remettant cette fois à l'élève les blocs de base dix illustrés ci-contre et en l'invitant à faire semblant qu'il s'agit de vrais billets. Jouez le même rôle en poursuivant le même but préparatoire, mais en insistant sur l'idée de **préparer la transaction qui demande l'effort minimal.**

Évaluez à partir de maintenant la compréhension de l'élève pour cette étape.

Procédez exactement comme précédemment, en utilisant uniquement les blocs de base dix.

a) Il s'agit cette fois-ci de préparer un paiement facile de 185 $ à partir d'une somme de 532 $. Réponse : 4 c + 12 d + 12 u

b) Les 4 propriétaires d'un kiosque de fruits et légumes ont réalisé un profit de 612 $. Il faut préparer un partage équitable de cette somme. Réponse : 4 c + 20 d + 12 u

[28] Il ne nous semble pas approprié de se limiter aux billets de 100 $, 10 $ et 1 $. La monnaie doit demeurer le lien le plus concret avec la réalité et nous suggérons fortement d'inclure au moins des billets de 5 $ et 50 $. Autrement, il y a un risque que l'élève considère les billets comme de l'argent « mathématique », ce qui en diminuerait l'intérêt et la pertinence pour sa compréhension.

Partie 2 : Symbolisation dynamique

Mettez l'argent jouet à la disposition de l'élève. L'évaluation de cette composante permet de savoir comment l'élève relie ses techniques de calcul à la réalité. Il s'agit donc de proposer d'abord un calcul écrit et de demander à l'élève d'associer les étapes de sa technique à un calcul concret similaire effectué avec de la monnaie. Nous nous limitons à l'addition et à la soustraction, car cela suffit habituellement pour évaluer les perceptions de l'élève.

Consigne à l'élève : « *Effectue ce calcul avec ta technique. Si tu refais ce calcul avec la monnaie, vois-tu un rapport entre ce que tu as écrit et la manipulation des billets?* »

a) Addition : 348 + 196
- Où retrouves-tu 9 + 4?
- As-tu fait quelque chose qui ressemble à la retenue (dizaines et centaines)?

b) Soustraction : 503 – 168
- Où retrouves-tu 0 – 6?
- As-tu fait quelque chose qui ressemble à l'« emprunt sur zéro »?
- As-tu fait quelque chose qui ressemble à l'emprunt aux centaines?

Pour montrer sa compétence à l'Étape 4, l'élève doit savoir **trouver la meilleure représentation d'un nombre qui facilite un calcul concret,** en expliquant ses intentions. L'élève reconnaît ce principe dans l'**écriture de ses techniques écrites** qu'il peut clairement **associer aux démarches du calcul concret** réalisées sur avec le matériel de numération.

Il était une fois : la meilleure représentation

Les algorithmes traditionnels de soustraction et de division, qui sont encore aujourd'hui enseignés dans les écoles francophones du Québec, ont été originellement inventés sur le principe de la meilleure représentation et au moyen du calcul concret sur l'abaque. Seules les transformations appliquées au fil des siècles pour les rendre plus compactes ont fini par voiler en bonne partie les manifestations de ce principe opératoire de tous nos algorithmes de calcul. Presque tous les procédés de calcul tirent leur origine du travail sur l'abaque.

Dans les exemples ci-dessous, la comparaison entre la technique par décomposition explicite et l'algorithme traditionnel révèle la même utilisation (en rouge) de la meilleure représentation :

Soustraction : 444 – 269

$$\begin{array}{cccc} & 3 & (13) & (14) \\ & 3 & (14) & 4 \\ & 4 & 4 & 4 \\ - & \underline{2} & \underline{6} & \underline{9} \\ & 1 & 7 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 3 & {}^{1}3 & \\ & \cancel{4} & \cancel{4} & {}^{1}4 \\ - & \underline{2} & \underline{6} & \underline{9} \\ & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

Décomposition explicite vs algorithme traditionnel

Division : 444 ÷ 3

$$\begin{array}{ccc} 3 & (12) & (24) \\ 3 & (14) & 4 \\ \underline{4} & \underline{4} & \underline{4} \\ & 3 & \end{array} = 148 \qquad \begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 3 \\ \cline{4-4} \underline{3} & & & 148 \\ 1 & 4 & & \\ \underline{1} & \underline{2} & & \\ & 2 & 4 & \\ & \underline{2} & \underline{4} & \\ & & 0 & \end{array}$$

Décomposition explicite vs algorithme traditionnel

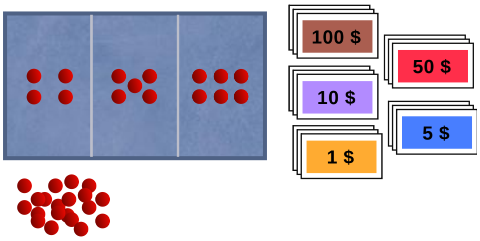
Ces procédés traditionnels de soustraction et de division sont en usage dans les écoles de tradition catholique depuis plus de cinq siècles. Dans les écoles de tradition protestantes, l'algorithme de division est pratiquement le même, sauf le crochet du diviseur, qui est placé à gauche, et la réponse, qui est notée au-dessus du dividende, dans le but d'éliminer certaines erreurs de position quand un zéro apparaît au résultat.

Quoi faire pour aider?

Si l'élève ne réussit pas de manière convaincante la tâche décrite dans l'introduction de la partie 1 de l'évaluation (calcul avec des billets et des blocs de base dix), revenez à la démarche proposée à l'Étape 3. Si l'élève peut manipuler des nombres représentés au moyen de divers systèmes de numération de forme, les activités qui suivent devraient l'aider à progresser dans la présente étape incontournable.

Matériel requis

- Planche à calcul;
- Jetons;
- Argent jouet.



Activité 1 : Décompositions avec contraintes

L'élève utilise d'abord de l'argent jouet.

Consigne à l'élève : « Représente chaque somme d'argent en respectant les contraintes qui sont fixées. Utilise le moins de billets possible. Explique tes échanges. »

a) 400 $	On peut acheter un livre qui coûte 20 $.
b) 250 $	On peut partager cette somme en deux montants égaux.
c) 501 $	On peut payer un manteau de 155 $.
d) 728 $	On peut partager le magot entre 4 personnes.
e) 538 $	On peut partager ce profit entre 3 vendeuses.

Si l'élève réussit, répéter la démarche, avec un minimum d'échanges sur la planche à calcul. Utilisez les dizaines du **matériel structuré** de l'Étape 2 pour simplifier la manipulation.

a) 400	On peut facilement enlever 2 dizaines.
b) 250	On peut partager ce nombre en deux lots différents.
c) 501	On peut facilement enlever le nombre 155.
d) 728	On peut répartir ce nombre sur 4 rangs égaux.
e) 538	On peut répartir ce nombre sur 3 rangs égaux.

L'élève devrait pouvoir constater la très grande ressemblance entre ces deux exercices.

Activité 2 : Décompositions sur la planche à calcul

L'élève utilise la planche à calcul pour résoudre des cas semblables à ceux de l'activité 4 de l'Étape 3.

k) 4 unités + 8 centaines + 5 dizaines = ____ Réponse : 854
l) 2 centaines + 11 dizaines + 23 unités = ____ Réponse : 333
m) 6 centaines + __ dizaines + 7 unités = 827 Réponse : 22
n) 4 dizaines + 5 unités + 11 dizaines + 4 centaines + 8 unités = ____ Réponse : 563
o) 5 centaines – 3 dizaines – 2 unités = ____ Réponse : 468
p) 6 dizaines + 145 – 9 unités + 4 centaines = ____ Réponse : 596
q) 3 x 4 dizaines + 2 x 8 unités + 4 x 2 centaines = ____ Réponse : 936
r) 4 x (1 centaine + 3 dizaines + 9 unités) = ____ Réponse : 556
s) $\frac{\text{9 centaines + 5 dizaines + 2 unités}}{4}$ = ____ Réponse : 238
t) $\frac{\text{7 centaines}}{4}$ + $\frac{\text{5 dizaines}}{2}$ + $\frac{\text{12 unités}}{3}$ = ____ Réponse : 204

Activité 3 : Meilleur portefeuille

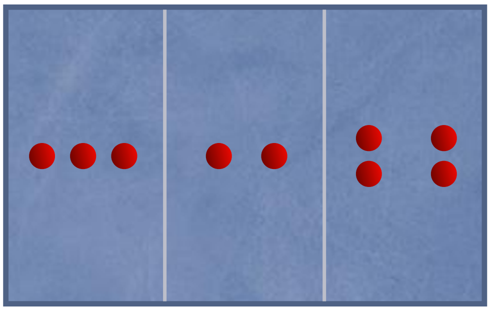
Consigne à l'élève : « *Imagine que les illustrations ci-dessous représentent des portefeuilles. Leurs contenus semblent peut-être différents, mais tous devaient valoir le même montant.*

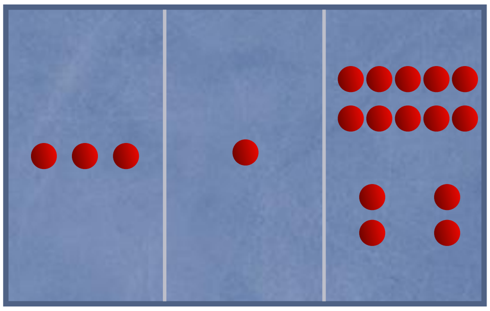
a) *Si des erreurs ont été commises, corrige-les.* »

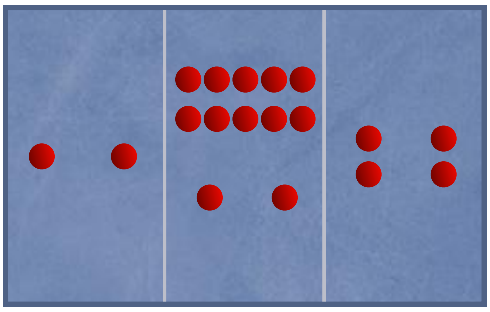
Réponse : Il manque une dizaine ou dix unités à la représentation ❻

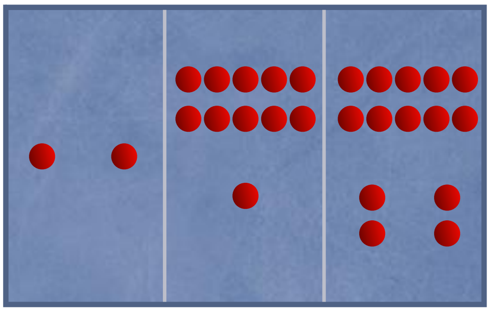
b) *« Trouve la représentation que tu croiseras en effectuant chacun des calculs suivants. »*

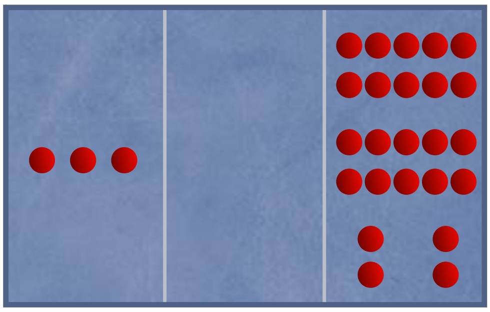
- 141 + 183 Réponse : la représentation ❸
- 3 x 108 Réponse : la représentation ❺
- 324 – 119 Réponse : la représentation ❷
- 324 – 159 Réponse : la représentation ❹
- 324 ÷ 2 Réponse : la représentation ❸

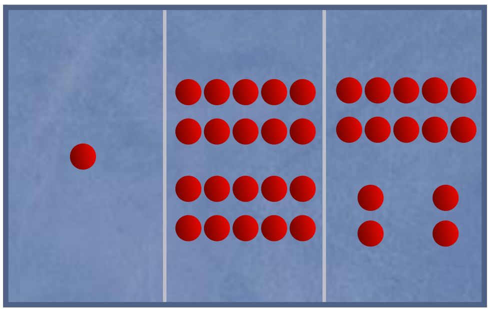








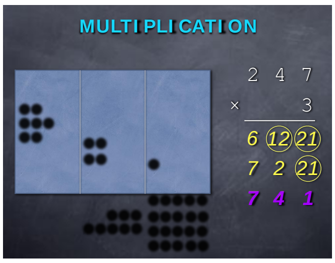




Proposez d'autres cas semblables. Demandez également à l'élève de créer un cas similaire.

Activité 4 : Symbolisation dynamique pour les quatre opérations

Avec l'élève, visionnez la vidéo Calcul_concret.mov présentant la **symbolisation dynamique** des procédés effectués sur la planche à calcul, pour chaque opération. Nous suggérons fortement d'adopter les **techniques écrites par décomposition explicite** qui y sont montrées. Chaque cas doit faire l'objet d'un questionnement en règle et l'élève doit toujours pouvoir expliquer ce qui se produit. Après chaque démonstration, demandez à l'élève de noter à son tour des calculs similaires sur l'abaque.



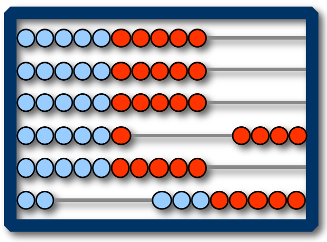
Étape 5 : Calcul mental et calcul écrit

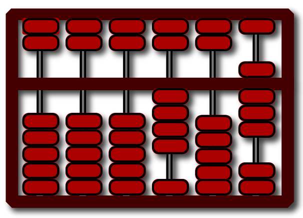
Quelle est la pertinence de passer à l'Étape 5? Le nouveau saut conceptuel attendu après l'apprentissage du calcul concret sur l'abaque élémentaire vise surtout à **augmenter l'efficacité opératoire.** À ce stade, calculer devient un métier, une science, voire un art! Le calcul scolaire doit désormais **s'adapter à la réalité technologique en priorisant le calcul mental,** au détriment du calcul écrit traditionnel. Ce dernier doit lui aussi s'adapter…

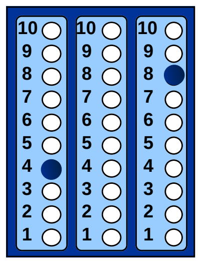
Les apprentissages attendus à l'Étape 5 ouvrent la porte aux procédés de calcul très performants. Ceux du calcul mental sont hérités de la **subitisation structurelle** et des multiples progrès historiques qui ont mené de l'abaque élémentaire aux divers types de **bouliers.** À l'ère de la technologie facilement accessible et très performante, le **calcul écrit** au moyen d'automatismes purs et non réfléchis trouve de plus en plus difficilement sa pertinence. Toutefois, l'existence du calcul écrit scolaire ne devrait pas être remise en question. L'heure est cependant au changement de paradigme! Désormais, **le calcul mental et un calcul écrit réformé doivent coexister et se renforcer** l'un et l'autre, dans le contexte du **calcul efficace.** Dans ce nouveau paradigme du calcul humain, le calcul écrit n'est plus l'objectif à long terme et le calcul mental, le parent pauvre… **Le calcul écrit devient un support à l'apprentissage prioritaire du calcul mental**.

L'expression **calcul efficace** désigne l'ensemble des **stratégies et des procédés** qui permettent d'effectuer les calculs rencontrés **au quotidien,** particulièrement dans le contexte de la **consommation** et de l'**économie élémentaire.** Le calcul efficace repose sur des **processus cérébraux globaux et visuels modelés sur les manipulations du calcul concret.** Pour des raisons liées à l'économie des supports – parchemin et encre! – adoptés au Moyen Âge pour permettre la tenue de livres, l'évolution du calcul écrit s'est lentement éloignée des principes du calcul efficace. Depuis plusieurs décennies, la piètre performance en calcul mental des adultes occidentaux démontre de façon indiscutable que **le calcul écrit traditionnel ne conduit absolument pas au calcul mental, ni au calcul efficace!** Dans le monde moderne envahi par les *i-bidules* de toutes sortes, le calcul efficace appelle également au réalisme : le calcul électronique est là pour performer… et pour rester! C'est pourquoi le paradigme du calcul efficace donne **priorité à l'estimation et au calcul mental,** les seuls modes de calcul « humain » qui puissent encore logiquement constituer une visée scolaire à long terme. Ils constituent nos derniers remparts de contrôle et de vérification « intelligente » du calcul désormais de plus en plus confié aux machines.

Les bouliers sont des abaques évolués. Encore aujourd'hui, ils sont les précieux alliés du calcul mental accompagnant l'apprentissage scolaire des élèves asiatiques, dont les performances en arithmétique surpassent largement celles obtenues dans la majorité des écoles occidentales. Le calcul sur un **abaque évolué** propose une voie royale menant au calcul efficace. À l'Étape 5, pour des raisons pédagogiques et pratiques, nous proposons la **superplanche** comme support du calcul efficace. La superplanche est un outil facile à reproduire et elle possède tous les attributs avantageux des bouliers. Voici trois types d'abaques évolués affichant chacun le nombre 408. Le nombre affiché sur le boulier chinois est exprimé par les 8 boules appuyées sur la traverse centrale (**4** × 100 + **1** × 5 + **3** × 1)[29].


Boulier européen

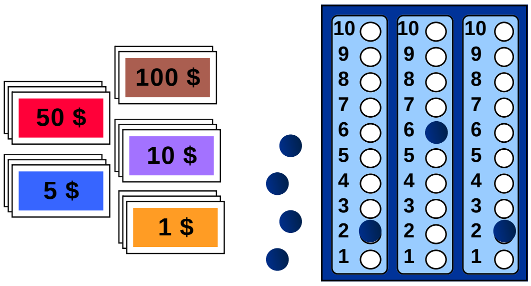

Boulier chinois



Superplanche

[29] Observez les artifices de **subitisation** adoptés sur chacun des bouliers afin d'accélérer la lecture du nombre de boules à chaque position : variation de la couleur (européen) et variation de la position sur la tige (chinois). Le boulier chinois repose habituellement à l'horizontale.

Scénario d'évaluation : Étape 5



Matériel requis

- 4 cartes avec opération (voir ci-dessous);
- Argent jouet;
- Superplanche;
- Jetons.
- Papier et crayon.

Présentation de la tâche

L'élève qui se situe à l'Étape 5 peut démontrer ses compétences en calcul efficace. L'évaluation porte sur deux volets du calcul efficace : le calcul mental et le calcul écrit. La connaissance des tables fait partie des habiletés incontournables de cette étape. Pour les cas ci-dessous, placez l'argent jouet comme dans un tiroir-caisse, même si l'élève n'aura pas à les manipuler. Nous subdivisons le scénario d'évaluation en deux parties, mais en pratique, les deux volets de chaque opération devraient être proposés successivement.

Partie 1 : Calcul mental

Consignes à l'élève : « *Nous allons faire comme si nous nous trouvons au comptoir d'une banque et tu joueras le rôle du commis. Il y aura différentes transactions et c'est toi qui feras tous les calculs nécessaires.* » Assurez-vous que l'élève applique les principes du calcul efficaces énoncés précédemment en lui demandant d'expliquer sa démarche.

a) **Addition** (montrez la carte ci-contre) : « *Je dépose198 $ dans mon compte d'épargne qui contient déjà 349 $. Estime le solde.* »

$$\begin{array}{r} 349 \\ +\ \underline{198} \end{array}$$

Réponse acceptable : entre 500 et 600.

Passez à la question a de la partie 2 qui concerne le même cas.

b) **Multiplication** (montrez la carte ci-contre) : « *Lundi, mardi et mercredi, je fais un même dépôt de 157 $. Estime le dépôt total.* »

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times\ \underline{\quad 3} \end{array}$$

Réponse acceptable : entre 400 et 500.

c) **Soustraction** (montrez la carte ci-contre) : « *J'ai 512 $ dans mon compte-chèques et je fais un retrait de 189 $. Estime le solde.* »

$$\begin{array}{r} 512 \\ -\ \underline{189} \end{array}$$

Réponse acceptable : entre 300 et 400.

d) **Division** (montrez la carte ci-contre) : « *J'ai 591 $ et je voudrais en faire cadeau à chacun de trois mes neveux. Peux-tu déposer chaque part dans leur compte? Estime le montant que chacun reçoit.* »

$$\begin{array}{c} \underline{591} \\ 3 \end{array}$$

Réponse acceptable : entre 150 $ et 250 $.

Note : Le tableau ci-dessous décrit les standards pour la **mémorisation des tables.** Par exemple, l'élève de 9 ans doit réussir 40 cas de division sur 50 en 3,5 minutes.

Partie 2 : Calcul écrit

Pour chaque opération ci-dessous, l'élève doit effectuer un calcul écrit efficace. La technique traditionnelle est acceptable, de même que tout procédé écrit efficace et bien maîtrisé. Pour franchir le seuil minimal, l'élève doit **au moins effectuer efficacement chaque calcul, sur la superplanche.**

a) 349 + 198; b) 157 × 3; c) 512 – 189; d) 591 ÷ 3.

Âge	+ 45/50	− 45/50	× 45/50	÷ 40/50
9	Temps alloué : 3,5 minutes			
10	Temps alloué : 3,0 minutes			
11	Temps alloué : 2,5 minutes			

Standards de mémorisation des tables

À l'Étape 5, l'élève devient efficace en calcul. Les standards du calcul mental sont malheureusement moins clairement définis que ceux du calcul écrit, dont la tradition est presque millénaire. Les **3 principes du calcul efficace** sont énoncés ci-dessous. À leur lecture attentive, on peut mieux comprendre les limites et la lourdeur du calcul écrit traditionnel par rapport au calcul mental, au calcul monétaire et au calcul sur le boulier. L'élève doit les appliquer systématiquement sur la superplanche pour modeler les procédés et les stratégies opératoires qui sont propres au calcul mental.

Principes du calcul efficace

Principe 1 : Voir grand

Toute personne performante en calcul mental prend d'abord le temps de **regarder globalement les opérations** à faire, à la recherche de différents indices : choix du niveau de précision utile, ordre de grandeur du résultat, difficulté potentielle du calcul à effectuer, stratégies simplificatrices possibles, etc. Il est donc hors de question de braquer son attention sur les chiffres des plus petites valeurs positionnelles, comme en calcul écrit. Aussi étonnant que cela puisse paraître, le calcul mental n'est véritablement possible qu'**en commençant par les unités supérieures,** et donc en opérant de la gauche vers la droite. Tous les as du calcul mental connaissent et appliquent ce principe. En situation de calcul efficace, les résultats aux unités et aux dizaines sont souvent négligeables. En calcul écrit traditionnel, il faut d'abord s'en encombrer, avant de passer aux positions décimales intéressantes! Voir grand, c'est malheureusement combattre plus de deux siècles d'enseignement du calcul écrit procédant en sens inverse de l'efficacité!

Principe 2 : Dire le résultat en calculant

Commencer par les plus grandes valeurs procure l'immense avantage de pouvoir dire la réponse tout en effectuant le calcul. Ce gain comporte cependant l'inconvénient d'obliger parfois de revenir sur un résultat, pour l'augmenter ou le diminuer. Ainsi, pour 356 + 197, les novices diront : « Quatre cents… non, cinq cent… quarante… non, cinq cent cinquante-trois. » L'entraînement à voir grand devrait cependant très rapidement enseigner une courte hésitation stratégique, le temps de jeter un bref regard à la position suivante et de conclure qu'on obtient une autre centaine ou une autre dizaine… L'expérience nous apprend aussi à réduire au minimum les mots énoncés durant le calcul, ce qui minimise le va-et-vient.

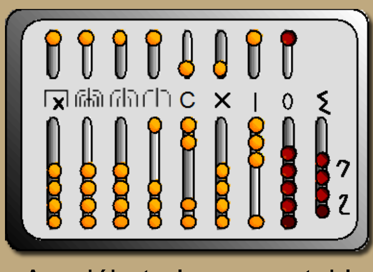
Principe 3 : Économiser son énergie

Toutes les astuces et les stratégies permettant de réduire l'effort opératoire sont souhaitables : mémorisation des tables, arrondissement des nombres, échange de facteurs, etc. L'astuce la plus commune du calcul mental est la **compensation.** C'est par elle que nous préférons calculer +20 $ – 0,01 $ plutôt +19,99 $. La compensation doit absolument faire partie des outils stratégiques enseignés aux élèves, à l'école primaire.

Tous les principes du calcul efficace sont naturellement développés par les gens qui manipulent l'argent, par exemple en tenant régulièrement une caisse. Le calcul mental, le calcul monétaire et le calcul sur boulier respectent les principes du calcul efficace.

Il était une fois : le calcul efficace

Au petit musée du calcul humain très performant, l'abaque – particulièrement le boulier – joue le rôle d'outil prodigieux! En effet, pendant au moins deux millénaires, et jusqu'à tout récemment, cet instrument se trouvait entre les mains des plus habiles calculateurs au monde. Les premiers abaques étaient tracés à même le sol et de simples cailloux (en latin, *calculi*) servaient à afficher les valeurs aux différentes positions. Le plus ancien boulier connu est une calculette romaine datant du 1er siècle de notre ère. Elle est reproduite ci-contre et le nombre 1753 s'y trouve affiché par les boules déplacées vers la rangée de chiffres romains, celles du haut valant cinq fois celles du bas.



Le calcul écrit a connu un développement tardif et il a été longtemps accompagné en parallèle du calcul sur l'abaque. Au début, les comptables romains calculaient sur des abaques ayant une structure positionnelle, tandis qu'ils notaient les nombres au moyen de leur système de numération de forme (I, V, X, L, etc.). C'est dans les monastères de l'Inde du III^{e} siècle de notre ère qu'est née la numération de position moderne. En réconciliant l'abaque et la numération chiffrée, les moines indiens ont créé l'ultime système de numération. Leurs neuf chiffres tracés dans la poussière se sont alors enrichis du zéro, qui permet de désigner, en notation symbolique, chaque espace vide significatif d'une représentation sur l'abaque. Cette invention d'apparence insignifiante allait pourtant révolutionner les mathématiques et les sciences exactes qui en dépendent!

Quoi faire pour aider?

Encore tout récemment, on rapportait qu'au comptoir de certaines banques du Japon, les caissiers calculaient le solde des clients sur papier, en faisant chaque fois la vérification au moyen du soroban, le boulier traditionnel de ce pays dominant en mathématiques. Inspirés par ce scénario de pure analogie, nous suggérons l'activité suivante pour aider les élèves.

Matériel requis

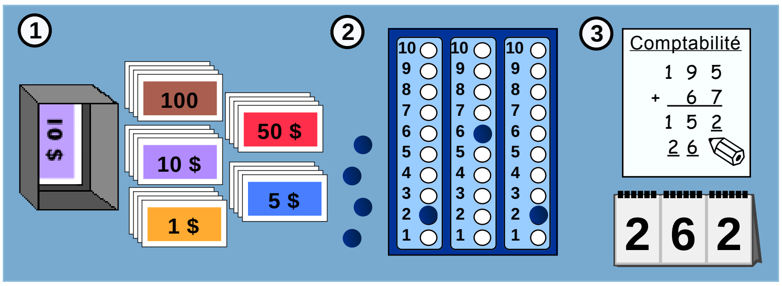
- Argent jouet;
- Boîte pour déposer les billets (voir l'illustration ci-dessous);
- Compteur (facultatif);
- Superplanche et jetons;
- Vidéos Étape5 : calcul efficace sur la superplanche.

Activité : Calculs à la japonaise

Faites de nouveau appel à la capacité de l'élève de *faire comme si...* en imaginant une boutique de vêtements. Des gens vont s'y arrêter pour faire des achats ou des livraisons. **En parallèle,** il faut :

1) Effectuer les transactions (manipuler les billets);
2) Vérifier les comptes (opérer sur la superplanche);
3) Tenir la comptabilité écrite et efficace (pour garder trace des calculs).

Côte à côte, installez trois postes de travail (voir ci-contre). Au premier poste de travail, placez l'argent appartenant à la clientèle ainsi qu'une boîte, qui représente la caisse de la boutique. Au deuxième poste de travail, placez une superplanche et des jetons représentant la calculatrice. Au troisième poste, placez un crayon et une feuille de papier, pour tenir la comptabilité, **parallèlement au travail sur la superplanche.** Le solde est finalement affiché sur le compteur. L'élève s'assied d'abord au poste 1 et l'orthopédagogue occupe le poste 2. Les rôles sont ensuite inversés. Plus tard, l'élève s'occupera du poste 2, tandis que l'orthopédagogue notera au poste 3 les étapes suivies par l'élève, etc. L'attribution des rôles permet à l'élève d'occuper progressivement tous les postes de travail.



Proposez de multiples transactions réalistes, par exemple : « *Une cliente achète une robe au prix de 195 $ et un pantalon à 67 $. Combien lui coûtent ces achats?* » L'élève du poste 1 prend les billets qui représentent le prix de chaque article acheté par la cliente et fait le compte, avant de déposer le tout dans la caisse. ***SIMULTANÉMENT, ET EN INSISTANT SUR L'ANALOGIE***, l'orthopédagogue représente et 195, puis 67 sur la superplanche : « *Voici notre calculatrice. Tout ce que tu fais avec les billets, je vais systématiquement l'imiter sur la superplanche, en faisant comme si...* » **Quand vous effectuez les manipulations sur l'abaque, adoptez le vocabulaire de l'argent pour marquer l'analogie :** « [...] *Puis, tu as échangé les billets de 10 et de 50 pour obtenir un billet de 100…* », etc.

Dès que le calcul sur la superplanche confirme le calcul fait par l'élève, avec les billets, proposez de noter le tout au poste 3, pour la tenue de livres de la boutique. Au début, les techniques écrites pourraient directement refléter les manipulations que vous venez d'exécuter sur la superplanche (comme à l'Étape 4). Si l'élève connaît des algorithmes de calcul écrit, cherchez en quoi ces techniques ressemblent aux procédés de calcul concret effectués aux deux autres postes. Progressivement, incitez l'élève à utiliser des **notations qui respectent les principes du calcul efficace.**

Visionnez avec l'élève les vidéos qui présentent le calcul efficace sur la superplanche avec les suggestions de notation écrite, en parallèle. L'élève peut adopter les procédés concrets et écrits de son choix, mais faites la promotion des techniques écrites qui favorisent davantage le calcul efficace.

Inventez des situations où des fournisseurs doivent être payés à même la caisse pour des livraisons de marchandises diverses (cas de soustraction). Imaginez aussi que le loyer à payer représente la moitié des ventes ou que les profits de la caisse sont répartis entre 3 ou 4 actionnaires (cas de division), etc. Chaque fonction pourrait également être attribuée à un élève différent, dans un atelier coopératif, et l'orthopédagogue joue le rôle de la cliente.

